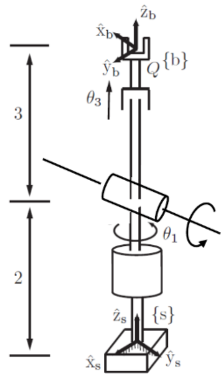
智能机器人技术
课后作业

一、计算/解答题，请写出解题过程（30 分）。

1. 如下图所示有一处于初始位形的 RRP 机器人（即讲义例 3），求（10 分）：

a) 写出各关节相对空间坐标系$\{s\}$的旋量坐标。求解当$\theta=(90°,90°,1)$时的正向运动学；手绘此时的机器人，标注$\{s\}$系和$\{b\}$系，求解此时的空间雅克比J_s；



初始位形M：

$$M=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{S}_1: \quad \omega_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, q_1=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, v_1=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{S}_2: \quad \omega_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, q_2=\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{S}_3: \quad \omega_3=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, v_3=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

当$\theta=(90°,90°,1)$时的正向运动学： $T(\theta)=e^{[\mathcal{S}_1]\theta_1}e^{[\mathcal{S}_2]\theta_2}e^{[\mathcal{S}_3]\theta_3}M$

$$\begin{aligned} T(\theta) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

空间雅克比J_s：

$$\mathcal{V}_{s1}(\theta): \quad \omega_{s1}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, q_1=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, v_{s1}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{V}_{s2}(\theta): \quad \omega_{s2}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, q_2=\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}, v_{s2}=\begin{bmatrix}-2\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{V}_{s3}(\theta): \quad \omega_{s3}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, v_{s3}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\therefore J_s(\theta)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) 写出各关节相对末端坐标系$\{b\}$的旋量坐标。求解当$\theta=(90°,90°,1)$时的正向运动学，确认与 a）中结果相同；求解此时的物体雅克比J_b。

$$\mathcal{B}_1: \quad \omega_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, q_1=\begin{bmatrix}0\\0\\-3\end{bmatrix}, v_1=\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_2: \quad \omega_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}, q_2=\begin{bmatrix}0\\0\\-3\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_3: \quad \omega_3=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, v_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

当$\theta = (90°, 90°, 1)$时的正向运动学： $T(\theta) = Me^{[\mathcal{B}_1]\theta_1}e^{[\mathcal{B}_2]\theta_2}e^{[\mathcal{B}_3]\theta_3}$

$$\begin{aligned} T(\theta) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

物体雅克比J_b:

$$\mathcal{V}_{b1}(\theta): \quad \omega_{b1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_{b1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{V}_{b2}(\theta): \quad \omega_{b2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, v_{b2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \therefore J_b(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{V}_{b3}(\theta): \quad \omega_{b3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_{b3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. 如下图所示有一处于初始位形的 RRRP 空间开链机器人，p为$\{b\}$系原点相对于$\{s\}$系的坐标，求（10 分）:

a） 试求当$\theta = (0,0,\pi/2, L)$时的物体雅克比$J_b(\theta)$；

由$\theta = (0,0,\pi/2, L)$可写出

$$J_b(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -L & 0 & -L & 0 \\ L & 0 & 0 & 1 \\ 0 & L & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b） 试求当$\theta = (0,0,\pi/2, L)$且$\dot{\theta} = (1,1,1,1)$时的$\dot{p}$。

$$\mathcal{V}_b = J_b(\theta)\dot{\theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi L}{2} \\ L \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_b \\ v_b \end{bmatrix}. \quad R_{sb} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{p} = R_{sb}v_b = \begin{bmatrix} -L \\ -\frac{\pi L}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

由$\dot{\theta} = (1,1,1,1)$可写出

$$\mathcal{V}_b = J_b(\theta)\dot{\theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -2L \\ L+1 \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_b \\ v_b \end{bmatrix} \qquad R_{sb} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{p} = R_{sb}v_b = \begin{bmatrix} -L-1 \\ -2L \\ L \end{bmatrix}$$

3. 如下图所示有一处于初始位形的 PRPRRR 空间开链机器人，此时基坐标系原点与末端坐标系原点之间距离为L，求（10 分）：

a） 空间雅克比J_s的前三列；

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}_{s1}(\theta): &\quad \omega_{s1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_{s1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\mathcal{V}_{s2}(\theta): &\quad \omega_{s2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_{s2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\mathcal{V}_{s3}(\theta): &\quad \omega_{s3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_{s3} = e^{\hat{z}\theta_2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_2 \\ \cos\theta_2 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

b） 物体雅克比J_b的后两列；

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}_{b6}(\theta): &\quad \omega_{b6} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, q_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_{b6} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\mathcal{V}_{b5}(\theta): &\quad \omega_{b5} = e^{\hat{x}(-\theta_6)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\theta_6 \\ \cos\theta_6 \end{bmatrix}, q_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_{b5} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

c） 初始位形时的$J_s(0)$；

$$
J_s(0) = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & L & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -L
\end{bmatrix}
$$

d） 初始位形时，若在末端坐标系的$-\hat{z}_b$方向产生 100N的力，需要关节提供多少力或力矩？

考虑初始位形时在$\{s\}$下表达的力旋量（wrench）：

$$
\mathcal{F}_s = \begin{bmatrix} m_s \\ f_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{sb} \times f_b \\ f_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100L \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \end{bmatrix} \qquad p_{sb} = \begin{bmatrix} 0 \\ L \\ 0 \end{bmatrix}, f_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{bmatrix}
$$

因此：

$$
\begin{aligned}
\tau &= J_s^T(0)\mathcal{F}_s \\
&= \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & L & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -L
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} -100L \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$