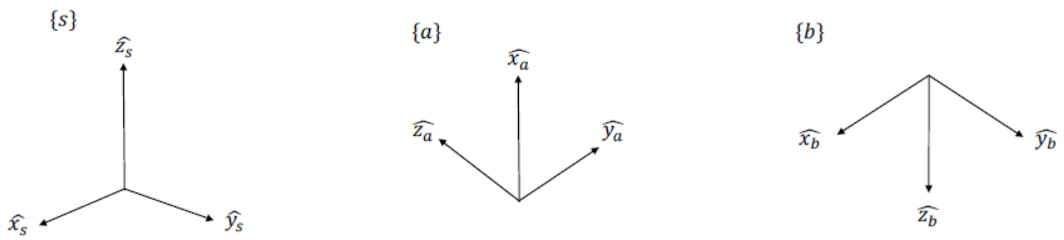
智能机器人技术
课后作业

一、计算/解答题，请写出解题过程（30 分）。

1. 已知一固定的空间坐标系$\{s\}$及其$\hat{x}_s$、$\hat{y}_s$、$\hat{z}_s$轴坐标，坐标系$\{a\}$的$\hat{x}_a$轴沿(0,0,1)方向，$\hat{y}_a$轴沿(-1,0,0)方向；坐标系$\{b\}$的$\hat{x}_b$轴沿(1,0,0)方向，$\hat{y}_b$轴沿(0,0,-1)方向，（10 分）。

a） 手绘 3 个坐标系，注意画在不同位置以便区分。



b） 计算旋转矩阵R_{sa}和R_{sb}。

$$R_{sa}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{bmatrix}\qquad R_{sb}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}$$

c） 已知R_{sb}，在不使用逆矩阵的情况下计算R_{sb}^{-1}，并验证坐标系画的是否正确。

$$R_{sb}^{-1}=R_{bs}=R_{sb}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

d） 已知R_{sa}和R_{sb}，计算R_{ab}，并验证坐标系画的是否正确。

$$R_{ab}=R_{as}R_{sb}=R_{sa}^{\mathrm{T}}R_{sb}=\begin{bmatrix}0&0&1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

e） 将$R=R_{sb}$作为变换算子，表示绕$\hat{x}$轴转动-90^o。计算$R_1=R_{sa}R$与$R_2=RR_{sa}$，并回答新姿态R_1与R_2分别对应的是R_{sa}绕哪个坐标系的$\hat{x}$轴转动得到的结果？

$$R_1=R_{sa}R=R_{sa}R_{sb}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

R_1对应将R_{sa}（即$\{a\}$相对于$\{s\}$）绕物体系$\{a\}$的$\hat{x}_a$轴转动-90^o。

$$R_2=RR_{sa}=R_{sb}R_{sa}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

R_2对应将R_{sa}（即$\{a\}$相对于$\{s\}$）绕空间系$\{s\}$的$\hat{x}_s$轴转动-90^o。

f） 利用R_{sb}将点$p_b=(1,2,3)$从$\{b\}$系变换到$\{s\}$系。

$$p_s=R_{sb}p_b=(1,3,-2)^T$$

g） 已知$\{s\}$系中一点$p_s=(1,2,3)$，计算$p'=R_{sb}p_s$和$p''=R_{sb}^Tp_s$。每一推导过程

均可以解释为坐标变换（无须移动点的位置）或移动点的位置（无须改变坐标系）。

$$p' = R_{sb}p_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{location transformation}$$

$$p'' = R_{sb}^{\mathrm{T}}p_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{coordinate change}$$

h） 已知$\{s\}$系中的角速度$\omega_s = (3,2,1)$，计算其在$\{a\}$系中的表示。

$$R_{as}\omega_s = \omega_a \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

i） 计算R_{sa}的矩阵对数$[\hat{\omega}]\theta$，并提取其中的元素：单位角速度$\hat{\omega}$和转动量θ（可以利用编程手段）。

$$R_{sa} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因为矩阵R_{sa}的迹$trace = 0$，所以我们利用讲义中的算法第 3 分类计算：

$$\theta = \cos^{-1}(-1/2) = 2\pi/3$$

$$[\hat{\omega}] = \frac{1}{2\sin\theta}(\bar{R} - \bar{R}^{\mathrm{T}}) = \frac{\sqrt{3}}{3}(R_{sa} - R_{as})$$

$$\Longrightarrow [\hat{\omega}] = 1/\sqrt{3} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \hat{\omega} = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

j） 计算与转动$\hat{\omega}\theta = (1,2,0)$的指数坐标对应的矩阵指数。

$$\hat{\omega}\theta = \sqrt{5} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow [\hat{\omega}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix}, \text{with } \theta = \sqrt{5}$$

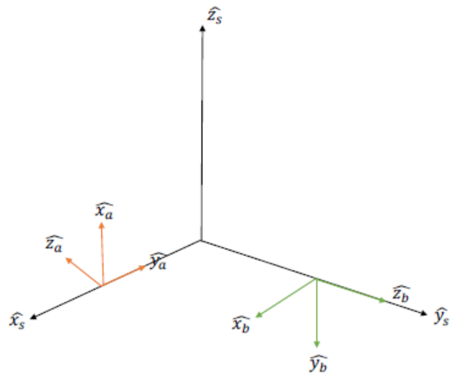
利用罗德里格斯公式 $R = \mathrm{e}^{[\hat{\omega}]\theta} = I + \sin\theta[\hat{\omega}] + (1 - \cos\theta)[\hat{\omega}]^2$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.704 \\ 0 & 0 & -0.352 \\ -0.704 & 0.352 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.294 & 0.647 & 0 \\ 0.647 & -0.324 & 0 \\ 0 & 0 & -1.6173 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.2938 & 0.6469 & 0.7037 \\ 0.6469 & 0.6765 & -0.3518 \\ -0.7037 & 0.3518 & -0.6173 \end{bmatrix}$$

2. 题干如 1，并且$\{a\}$系原点相对$\{s\}$系的坐标为(3,0,0)，$\{a\}$系原点相对$\{s\}$系的坐标为(0,2,0)，（10 分）。

a) 手绘 3 个坐标系，注意它们之间的关系位置关系。



b) 计算齐次变换矩阵T_{sa}和T_{sb}。

$$R_{sa}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{bmatrix}\ R_{sb}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}\quad T_{sa}=\begin{bmatrix}0&-1&0&3\\0&0&-1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} T_{sb}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&2\\0&-1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

c) 已知T_{sb}，在不使用逆矩阵的情况下计算T_{sb}^{-1}，并验证坐标系画的是否正确。

$$T_{sb}^{-1}=\begin{bmatrix}R_{sb}&p_b\\0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}R_{sb}^{\mathrm{T}}&-R_{sb}^{\mathrm{T}}p_b\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

d) 已知T_{sa}和T_{sb}，计算T_{ab}，并验证坐标系画的是否正确。

$$T_{ab}=T_{sa}^{-1}T_{sb}\qquad T_{sa}^{-1}=\begin{bmatrix}R_{sa}^{\mathrm{T}}&-R_{sa}^{\mathrm{T}}p_a\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\-1&0&0&3\\0&-1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$T_{ab}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\-1&0&0&3\\0&-1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&2\\0&-1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\-1&0&0&3\\0&0&-1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

e) 将$T=T_{sb}$作为变换算子，表示绕$\hat{x}$轴转动-90^o与沿$\hat{y}$移动 2 个单位。计算$T_1=T_{sa}T$与$T_2=TT_{sa}$，并回答新姿态T_1与T_2分别对应的是T_{sa}绕哪个坐标系的变换得到的结果？

$$T_1=T_{sa}T=\begin{bmatrix}0&-1&0&3\\0&0&-1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&2\\0&-1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-1&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

T_1对应将T_{sa}（即$\{a\}$相对于$\{s\}$）沿物体系$\{a\}$先平移后旋转。

$$T_2=TT_{sa}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&2\\0&-1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&0&3\\0&0&-1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&0&3\\1&0&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

T_2对应将T_{sa}（即$\{a\}$相对于$\{s\}$）沿空间系$\{s\}$先旋转后平移。

f) 利用T_{sb}将点$p_b = (1,2,3)$从$\{b\}$系变换到$\{s\}$系。

$$p_s = T_{sb}p_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies p_s = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

g) 已知$\{s\}$系中一点$p_s = (1,2,3)$，计算$p' = T_{sb}p_s$和$p'' = T_{sb}^T p_s$。每一推导过程均可以解释为坐标变换（无须移动点的位置）或移动点的位置（无须改变坐标系）。p'为移动点的位置（change in location），p''为坐标变换（change in reference frame）

$$p' = T_{sb}p_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$p'' = T_{sb}^{-1}p_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

h) 已知$\{s\}$系中的旋量$\mathcal{V} = (3,2,1,-1,-2,-3)$，计算其在$\{a\}$系中的表示。

$$\mathcal{V}_a = [\mathrm{Ad}_{T_{as}}]\mathcal{V}_s$$

$$T_{as} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \implies [\mathrm{Ad}_{T_{as}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies [\mathrm{Ad}_{T_{as}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathrm{V}_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ -9 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

i) 计算T_{sa}的矩阵对数$[\mathcal{S}]\theta$，并提取其中的元素：单位螺旋轴$\mathcal{S}$和转动量θ。

因为R_{sa}同题目1，因此求解θ和$\hat{\omega}$的过程和结果参见题目1.

$$G^{-1}(\theta) = (1/\theta)I - (1/2)[\bar{\omega}] + ((1/\theta) - (1/2)(\cot(\theta/2))[\bar{\omega}]^2$$

$$= \begin{bmatrix} 0.352 & 0.226 & 0.352 \\ -0.352 & 0.352 & 0.2257 \\ -0.2257 & -0.352 & 0.352 \end{bmatrix}$$

$$v = G^{-1}(\theta)p = [1.0548 \ \ -1.0548 \ \ -0.6772]^{\mathrm{T}}$$

$$[s] = \begin{bmatrix} [\omega] & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5774 & -0.5774 & 1.0548 \\ 0.5774 & 0 & -0.5774 & -1.0548 \\ 0.5774 & 0.5774 & 0 & -0.6772 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$s = [0.5774 \ \ -0.5774 \ 0.5774 \ 1.0548 \ \ -1.0548 \ \ -0.6772]^{\mathrm{T}} = \omega/||\omega|| \qquad \implies \dot{\theta} = 1$$

$$h = \hat{\omega}^{\mathrm{T}}v/\dot{\theta} = 0.827$$

$$v = -\hat{s}\dot{\theta} \times q + h\hat{s}\dot{\theta} \implies q = [-1 \ 1 \ 0]^{\mathrm{T}}$$

j) 计算与转动$\mathcal{S}\theta = (0,1,2,3,0,0)$的指数坐标对应的矩阵指数。

$$\mathcal{S}\theta = [0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 0 \ 0]^{\mathrm{T}} = [\omega\theta, v\theta]^{\mathrm{T}} \implies \omega\theta = [0 \ 1 \ 2]^{\mathrm{T}} \implies \theta = \sqrt{5}$$

$$e^{[s]\theta}=\begin{bmatrix} e^{[\omega]\theta} & (I\theta+(1-\cos\theta)[\omega]+(\theta-\sin\theta)[\omega]^2)v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\omega_s]=\begin{bmatrix} 0 & -0.8944 & 0.4472 \\ 0.8944 & 0 & 0 \\ -0.4472 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{[\omega]\theta}=\begin{bmatrix} -0.6173 & -0.7037 & 0.3518 \\ 0.7037 & -0.2938 & 0.6469 \\ -0.3518 & 0.6469 & 0.6765 \end{bmatrix}$$

$$G(\theta)v=\begin{bmatrix} 1.0555 \\ 1.9407 \\ -0.9704 \end{bmatrix} \quad e^{[s]\theta}=\begin{bmatrix} -0.6173 & -0.7037 & 0.3518 & 1.0555 \\ 0.7037 & -0.2938 & 0.6469 & 1.9407 \\ -0.3518 & 0.6469 & 0.6765 & -0.9704 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

3. 目前工业机器人领域经常需要定义 4 种坐标系：参考坐标系$\{a\}$，末端或工具坐标系$\{b\}$、图像坐标系$\{c\}$、工件坐标系$\{d\}$，如下所示，（10 分）。

a）基于图中所给尺寸，确定T_{ad}和T_{cd}。

$$T_{ad}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{cd}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b）若$T_{bc}=[1\ 0\ 0\ 4; 0\ 1\ 0\ 0; 0\ 0\ 1\ 0; 0\ 0\ 0\ 1]$，求$T_{ab}$。

$$T_{ab}T_{bc}T_{cd}=T_{ad}.\ \text{Thus}\ T_{ab}=T_{ad}(T_{bc}T_{cd})^{-1}$$

$$T_{bc}T_{cd}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(T_{bc}T_{cd})^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{ab}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$