第一章 复数

1　i^2=-1　　$i=\sqrt{-1}$　　欧拉公式　　z=x+iy

实部 Re z　　虚部　Im z

2 运算　① $z_1 \equiv z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$　　$\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$

②$(z_1 \pm z_2) = \operatorname{Re}(z_1 \pm z_2) + \operatorname{Im}(z_1 \pm z_2) = (\operatorname{Re} z_1 \pm \operatorname{Re} z_2) + (\operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2)$

③
$$\begin{aligned}&z_1 \cdot z_2\\&= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)\\&= x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 - y_1y_2\\&= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)\end{aligned}$$

④$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \dfrac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$

⑤$\bar{z} = x - iy$　　共轭复数

☆　$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$　　共轭技巧

运算律　　P1 页

3 代数，几何表示

$z = x + iy$　　z 与平面点(x, y)一一对应，与向量一一对应

辐角 当 z≠0 时，向量 z 和 x 轴正向之间的夹角θ，记作θ=Arg z=$\theta_0 + 2k\pi$　k=±1±2 ±3…

把位于-π＜θ_0⩽π 的θ_0叫做 Arg z 辐角主值 记作θ_0=arg z_0

4 如何寻找 arg z

例：z=1-i　　$-\dfrac{\pi}{4}$

z=i　　$\dfrac{\pi}{2}$

z=1+i　　$\dfrac{\pi}{4}$

z=-1　　π

5　极坐标：$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$　　$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

利用欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

可得到 $z=re^{i\theta}$

$$z_1\cdot z_2=r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{i\theta_2}=r_1r_2e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2}=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

6 高次幂及 n 次方

$$z^n=z\cdot z\cdot z\cdots\cdots z=r^ne^{in\theta}=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

凡是满足方程 $\omega^n=z$ 的 ω 值称为 z 的 n 次方根，记作 $\omega=\sqrt[n]{z}$

$z=re^{i(\theta+2k\pi)}=\omega^n$ 即 $r=|\omega|^n$ $|\omega|=r^{\frac{1}{n}}$

$\theta+2k\pi=n\varphi$ $\varphi=\dfrac{\theta+2k\pi}{n}$

第二章解析函数

1 极限

2 函数极限

① 复变函数

对于任一 $Z\in D$ 都有 $W\in \mathrm{E}$ 与其对应 $\omega=f(z)$

注：与实际情况相比，定义域，值域变化

例 $f(z)=z$

② $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\mathrm{A}$ $z\to z_0$ 称 $f(z)$ 当 $z\to z_0$ 时以 A 为极限

☆ 当 $\mathrm{A}=f(z_0)$ 时，连续

例1 证明 $f(z)=\bar{z}$ 在每一点都连续

证：$|f(z)-f(z_0)|=|\overline{z-z_0}|=|z-z_0|\to 0$ $z\to z_0$

所以 $f(z)=\bar{z}$ 在每一点都连续

3 导数

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{df(z)}{z}\bigg|_{z=z_0}$$

例 2 $f(z)=C$ 时有 $(C)'=0$

证：对 $\forall z$ 有 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{C-C}{\Delta z}=0$ 所以 $(C)'=0$

例 3 证明 $f(z)=\bar{z}$ 不可导

解：令 $\omega=z-z_0$ $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\dfrac{\bar{z}-\overline{z_0}}{z-z_0}=\dfrac{\overline{z-z_0}}{z-z_0}=\dfrac{\bar{\omega}}{\omega}=\dfrac{x-iy}{x+iy}$

当 $\omega\to 0$ 时，不存在，所以不可导。

定理：$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z=x+iy$ 处可导 $\Leftrightarrow$ u，v 在 (x,y) 处可微，且满足 C-R 条件 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 且 $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}$

例 4 证明 $f(z)=\bar{z}$ 不可导

解：$f(z)=\bar{z}=x-iy$ 其中 $u(x,y)=x$ $v(x,y)=-y$ u,v 关于 x,y 可微

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=1\neq\dfrac{\partial v}{\partial y}=-1$ 不满足 C-R 条件 所以在每一点都不可导

例 5 $f(z)=\operatorname{Re}z$

解：$f(z)=\operatorname{Re}z=x$ $u(x,y)=x$ $v(x,y)=0$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=1\neq\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$ 不满足 C-R 条件 所以在每一点都不可导

例 6： $f(z)=|z|^2$

解：$f(z)=|z|^2=x^2+y^2$ 其中 $u(x,y)=x^2+y^2$ $v(x,y)=0$

根据 C-R 条件可得 $2x=0,2y=0\Rightarrow x=0,y=0$

所以该函数在 $z=0$ 处可导

4 解析

若 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内都可导，此时称 $f(z)$ 在 z_0 处解析。

用 C-R 条件必须明确 u,v

四则运算 $(f\pm g)'=f'\pm g'$ $\quad$ $(f(g(z)))'=f'(g)\cdot g'(z)$

$(kf)'=kf'$ $\quad$ $(z^n)'=nz^{n-1}$

$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$ $\quad$ ☆ $(e^z)'=e^z$

$$\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$$

例：证明 $f(z)=e^z$ $\left(e^z\right)'=e^z$

解： $f(z)=e^z=e^x\cos y+ie^x\sin y$

则 $u(x,y)=e^x\cos y$ $v(x,y)=e^x\sin y$ $\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y=\frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y$

$\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y=-\frac{\partial v}{\partial x}=-e^x\sin y$ 任一点 $z=x+iy$ 处满足 C-R 条件

所以 e^z 处处解析 $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^z$

练习：求下列函数的导数

$f(z)=|z|^2\cdot z$

解: $f(z)=|z|^2\cdot z=\left(x^2+y^2\right)(x+iy)=x^3+ix^2y+xy^2+iy^3=x^3+xy^2+i\left(x^2y+y^3\right)$

$u(x,y)=x^3+xy^2$ $v(x,y)=x^2y+y^3$ 所以 $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+y^2$ $\frac{\partial v}{\partial y}=x^2+3y^2$

$\frac{\partial u}{\partial y}=2xy$ $-\frac{\partial v}{\partial x}=-2xy$ 根 据 C-R 方 程 可 得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+y^2=\frac{\partial v}{\partial y}=x^2+3y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2xy=-\frac{\partial v}{\partial x}=-2xy \qquad \Rightarrow x=0,y=0$$

所以当 $z=0$ 时 $f(z)$ 存在导数且导数为 0，其它点不存在导数。

初等函数

Ⅰ常数

Ⅱ指数函数 $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$

① 定义域 ② $e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$ ③ $e^{z+2\pi i}=e^z(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=e^z$ ④ $\left(e^z\right)'=e^z$

Ⅲ对数函数 称满足 $z=e\omega$ 的 ω 叫做 z 的对数函数，记作 $\omega=\ln z$

分类：类比$\sqrt[n]{z}$的求法（经验）

目标：寻找$|\omega|$　$\varphi=\arg\omega$幅角主值

可用：$z=e^{\omega}$　$z=re^{i\theta}$　$\omega=u+iv$

过程：$z=re^{i\theta}=e^{\omega}=e^{u+iv}=e^{u}\cdot\left|e^{iv}\right|=r\left|e^{i\theta}\right|\quad\Rightarrow r=e^{u},e^{i\theta}=e^{iv}$

$\Rightarrow u=\ln r,v=\theta+2k\pi\qquad k=0,\pm1,\pm2\cdots\cdots$

所　以　$\omega=u+iv=\ln r+i(\theta+2k\pi)=\ln r+i\mathrm{A}rgz=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)$

$k=0,\pm1,\pm2\cdots\cdots$

例：求$Ln(-1)$　　$Ln(1+i)$　　$Ln(i)$　的值

$\arg(-1)=\pi$

$Ln(-1)=\ln|-1|+i(\arg(-1)+2k\pi)=i\pi(2k+1)\quad k=0,\pm1,\pm2\cdots\cdots$

$\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$

$Ln(1+i)=\ln|1+i|+i(\arg(1+i)+2k\pi)=\frac{1}{2}\ln 2+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\quad k=0,\pm1,\pm2\cdots\cdots$

$\arg(i)=\frac{\pi}{2}$

$Ln(i)=\ln|i|+i(\arg i+2k\pi)=1+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\quad k=0,\pm1,\pm2\cdots\cdots$

Ⅳ幂函数 对于任意复数α，当$z\neq0$时

$\omega=z^{\alpha}=e^{\alpha Lnz}$

例 1：求i^{1+i}的值

解　：　$i^{1+i}=e^{\ln i^{1+i}}=e^{(1+i)L}=e^{(1+i)(\ln|i|+i\quad(i))i}=e^{(1+i)i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}=e^{(i-1)\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$

$k=0,\pm1,\pm2\cdots\cdots$

例 2：求$(1-i)^{3+i}=e^{\ln(1-i)^{3+i}}=e^{(3+i)\ln(1-i)}=e^{(3+i)\left(\frac{1}{2}\ln 2+i\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)}$

Ⅴ三角函数

$$\begin{cases} e^{iy} = \cos y + i\sin y \\ e^{-iy} = \cos y - i\sin y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \\ \sin y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \end{cases}$$

定义：对于任意复数 $z = x + iy$，由关系式可得 z 的余弦函数和正弦函数

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

例：求 $\sin(1+i)$　　$\cos(5+i)$

解：$\sin(1+i) = \dfrac{1}{2i}\left[e^{i(1+i)} - e^{-i(1+i)}\right]$

$\cos(5+i) = \dfrac{1}{2}\left[e^{i(5+i)} + e^{-i(5+i)}\right]$

第三章复变函数的积分

1 复积分

定理 3.1 设 C 是复平面上的逐段光滑曲线 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在 C 上连续，则 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在 C 上可积，且有

$$\int_C f(z)dz = \int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_C u(x,y)dy + v(x,y)dx$$

注：①C 是线　②方式跟一元一样

方法一：思路：复数→实化

把函数 $f(z) = u + iv$ 与微分 $dz = dx + idy$ 相乘，可得

$$\int_C f(z)dz = \int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_C u(x,y)dy + v(x,y)dx$$

方法二：参数方程法　☆核心：把 C 参数

C：$z(t)$　　$\alpha \le t \le \beta$

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta z(t)z'(t)dt$$

例：　求 $\int_C \bar{z}dz$　①C：$0 \to 1+i$ 的直线段② $0 \xrightarrow{C_1} 1$；$1 \xrightarrow{C_2} 1+i$

解：①C：　$z(t) = t + it$　　$0 \le t \le 1$

$$\int_C \bar{z}dz = \int_0^1 (t - it)(t + it)' dt = \int_0^1 t(1-i)(1+i)dt = 1$$

② $C_1 : z(t) = t$　　$0 \le t \le 1$

$C_2: z(t)=1+it \qquad 0\le t\le 1$

$$\int_C \bar{z}dz=\int_{C_1}\bar{z}dz+\int_{C_2}\bar{z}dz=\int_0^1 tdt+\int_0^1(1-it)dt=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+i\right)=1+i$$

★ 结果不一样

2 柯西积分定理

例：$\int_C \frac{1}{(z-a)^n}dz=\begin{cases}2\pi i & n=1\\ 0 & n\ne 1\end{cases}$

C：以 a 为圆心，ρ 为半径的圆，方向：逆时针

解 ： C ： $z=a+\rho e^{i\theta} \qquad z=x+iy \qquad 0\le\theta\le 2\pi$

$$\int_C \frac{1}{(z-a)^n}dz=\int_0^{2\pi}\left(\rho e^{i\theta}\right)^n dz=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\left(\rho e^{i\theta}\right)^n}\cdot\rho ie^{i\theta}d\theta$$

$$=\frac{i}{\rho^{n-1}}\int_0^{2\pi}e^{(1-n)i\theta}d\theta=\begin{cases}2\pi i & n=1\\ \frac{1}{(1-n)i}\int_0^{2\pi}e^{(1-n)i\theta}d((1-n)i\theta)=0 & n\ne 1\end{cases}$$

☆ 积分与路径无关：①单联通 ②处处解析

例：求 $\int_C(2z^2+8z+1)dz$，其中 C 是连接 O 到点 $(0,2\pi a)$ 的摆线：$\begin{cases}x=a(\theta-\sin\theta)\\ y=a(1-\cos\theta)\end{cases}$

解：已知，直线段 L 与 C 构成一条闭曲线。因 $f(z)=2z^2+8z+1$ 在全平面上解析，

则 $\int_{C^-+L}(2z^2+8z+1)dz=0$

即 $\int_C(2z^2+8z+1)dz=\int_L(2z^2+8z+1)dz$

把函数沿曲线 C 的积分化为沿着直线段 L 上的积分。由于

$$\int_L(2z^2+8z+1)dz=\int_0^{2\pi a}(2x^2+8x+1)dx=2\pi a\left(\frac{8}{3}\pi^2a^2+8\pi a+1\right)$$

故 $\int_C(2z^2+8z+1)dz=2\pi a\left(\frac{8}{3}\pi^2a^2+8\pi a+1\right)$

★关键：①恰当参数 ②合适准确带入 z

3 不定积分

定义 3.2 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内连续，若 D 内的一个函数 $\Phi(z)$ 满足条件

$$\Phi'(z)=f(z) \qquad z\in D$$

定理 3.7　若可用上式，则 $\int_{z_0}^{z} f(z)dz = \Phi(z) - \Phi(z_0)$　　　$z, z_0 \in D$

例：　计算 $\int_0^i e^z dz$

解：$\int_0^i e^z dz = e^z\Big|_0^i = e^i - 1$

练习：计算 $\int_2^{2+i} ze^{3z^2+1}dz$

解：$\int_2^{2+i} ze^{3z^2+1}dz = \frac{1}{2}\int_2^{2+i} e^{3z^2+1}d(z^2) = \frac{1}{6}\int_2^{2+i} e^{3z^2+1}d(3z^2+1) = \frac{4i-1}{2}$

4 柯西积分公式

定理 处处解析 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 所围成的区域内则 $f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz$

例 1：$\int_{|z|=1} \frac{e^z - 1}{z} dz$

解：$\int_{|z|=1} \frac{e^z - 1}{z} dz = \int_{|z|=1} \frac{e^z - 1}{z - 0} dz = (e^z - 1)\Big|_{z=0} = 0$

例 2：$\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2 - 1} dz$

解：$\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2 - 1} dz = \frac{1}{2}\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z-1} dz - \frac{1}{2}\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+1} dz = 2\pi i \sin 1$

例 3：$\int_{|z|=2} \frac{z}{(9-z)^2(z+7)} dz$

解：$\int_{|z|=2} \frac{z}{(9-z^2)(z+7)} dz = \int_{|z|=2} \frac{\frac{z}{9-z^2}}{z-(-i)} dz = 2\pi i \frac{z}{9-z^2}\Big|_{z=-i} = \frac{\pi}{5}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \qquad\qquad z \in D$$

注：①C：$z \in D$

②　$\frac{1}{\zeta - z}$　　一次分式

③找到 $f(z)$　　$f(z)$ 在 D 内处处解析

例 4：$\int_{|z|=2}\frac{\sin z+z}{2z(z-1)}dz$

解 :

$$\int_{|z|=2}\frac{s\quad z+z}{2z(z-1)}dz \qquad i$$

$$=\int_{|z|=2}\frac{\frac{s\quad z+z}{2}}{z-1}dz-\int_{|z|=2}\frac{\frac{s\quad z+z}{2}}{z-0}dz=2\pi i\left[\frac{s\quad z+z}{2}\Big|_{z=1}-\frac{s\quad z+z}{2}\Big|_{z=0}\right]=\pi i(s\quad 1+1)$$

5　解析函数的高阶导数

公式：$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta \qquad z\in D$　　n=1，2……

应用要点：① $z\in D$

② $\frac{1}{(\zeta-z)^{n+1}}\to "n"$

③精准分离　$\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}$

$$\int_{|Z|=1}\frac{\sin z}{2z^{3}}dz$$

例：$=\int_{|z|=1}\frac{\frac{\sin z}{2}}{(z-0)^{2+1}}dz$

$$=\frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{\sin z}{2}\right)\Big|_{z=0}$$

$$=0$$

6　调和函数

若 $g(x,y)$ 满足 $\Delta g=\frac{\partial^{2}g}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}g}{\partial y^{2}}=0$ 则称 $g(x,y)$ 叫做 D 内的调和函数

若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 D 内解析

所以 $\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}u}{\partial y^{2}}=\frac{\partial^{2}v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^{2}v}{\partial x\partial y}=0$

把 u,v 称为共轭调和函数

第四章　级数理论

1 复数到$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$　距离$d(z,\omega)=|z-\omega|$

谈极限　对$\{z_n\}$ 若有$z_0\in D$使得　$d(z_n,z_0)=|z_n-z_0|\to 0$　$(n\to\infty)$

此时　z_0为$\{z_n\}$ 的极限点　记作 $z_0=\lim\limits_{n\to\infty} z_n$　或$z_n\to z_0$　$(n\to\infty)$

推广：对一个度量空间(x,d)都可谈极限

2 极限的性质

$$\begin{matrix} z_n\to z_0 \\ \omega_n\to\omega_0 \end{matrix}\quad (n\to\infty)\Rightarrow\begin{cases} z_n\pm\omega_n\to z_0\pm\omega_0 \\ z_n\cdot\omega_n\to z_0\cdot\omega_0 \\ \dfrac{z_n}{\omega_n}\to\dfrac{z_0}{\omega_0} \end{cases}\quad (n\to\infty)\quad \omega_n\neq 0$$

3　$z_n=x_n+iy_n\to z_0=x_0+iy_0(n\to\infty)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x_n\to x_0 \\ y_n\to y_0 \end{cases}\quad (n\to\infty)$$

4 $\{z_n\}$　级数问题

$S_n=z_1+z_2+z_3\cdots\cdots+z_n$　　$\{S_n\}$ 部分和数列

若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S_0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$　　则$\{z_n\}$ 收敛，反之则发散。

性质：1 若$\sum z_n$　$\sum\omega_n$ 都收敛，则$\left(\sum z_n\right)\pm\left(\sum\omega_n\right)=\sum(z_n\pm\omega_n)$收敛

2 若一个收敛，一个发散，可推出发散

$$3\begin{cases} S_n\to S_0 \\ S_{n+1}\to S_0 \end{cases}\quad (n\to\infty)$$

$(n\to\infty)$

若$\sum|a_n|\langle+\infty\Rightarrow\sum a_n$　绝对收敛

若$\sum|a_n|=+\infty$　但$\sum a_n$ 收敛 ，为条件收敛

等比级数 ： $S_n = z + z^2 + \cdots + z^n = \dfrac{z\left(1 - z^n\right)}{1 - z}$

$S_n \to \dfrac{z}{1-z}$ $\quad |z|\langle 1$ 时收敛，其他发散 $(n \to \infty)$

幂级数 $\quad \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$

$\zeta = z - z_0$ $\quad$ 则 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n \zeta^n$

求收敛域 $\quad \ell = \lim_{n\to\infty} \dfrac{|C_{n+1}|}{|C_n|} = \begin{cases} 0 < \ell < +\infty \\ \ell = 0 \\ \ell = +\infty \end{cases}$

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\ell} & 0 < \ell < +\infty \\ +\infty & \ell = 0 \\ 0 & \ell = +\infty \end{cases}$$

例：求 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$ 的收敛半径及收敛圆

解：因为 $\lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{C_{n+1}}{C_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ 所以级数的收敛半径为 R=1，收敛圆为 $|z| < 1$

泰勒级数

泰勒定理：设函数 $f(z)$ 在圆 K：$|z - z_0| < R$ 内解析，则 $f(z)$ 在 K 内可以展成幂级数

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$ 其中，$C_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ ，（n=0,1,2……），且展式还是唯一的。

例 1：求 $f(z) = e^z$ 在 $z = 0$ 处的泰勒展式

解 ： $f(z) = e^z$ 在全平面上解析， $f^{(n)}(z) = e^z$ ， $f^{(n)}(0) = 1$

所以在 $z = 0$ 处的泰勒展式为

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \qquad (|z| < \infty)$$

例 2： 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(1-z)^2}$ 展成 $z-i$ 的幂级数

解 ：

$$f(z)=\frac{1}{(1-z)^2}=\left(\frac{1}{1-z}\right)'=\left(\frac{1}{1-i-(z-i)}\right)'=\frac{1}{(1-i)^2}\left[1+2\left(\frac{z-i}{1-i}\right)+\cdots+n\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^{n-1}+\cdots\right]$$

$$\left(|z-i|<\sqrt{2}\right)$$

罗朗级数

罗朗定理 若函数 $f(z)$ 在圆环 D：$r<|z-z_0|<R(0\le r<R\le\infty)$ 内解析，

则当 $z\in D$ 时，有 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$

其中 $C_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta \qquad (n=0,\pm1,\pm2\cdots)$

例：将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环（1）$1<|z|<2$ （2）$2<|z|<+\infty$

内展成罗朗级数。

解：（1）在 $1<|z|<2$ 内，由于 $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1,\left|\dfrac{z}{2}\right|<1$，所以

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

（2）在 $2<|z|<+\infty$ 内，由于 $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1,\left|\dfrac{2}{z}\right|<1$，所以

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=$$

$$\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}-1}{z^n}$$

孤立奇点

定义：若函数 $f(z)$ 在 z_0 的去心邻域 $0<|z-z_0|<R(0<R\le+\infty)$ 内解析，在 z_0 点不解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点。

例 ： $\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots$ $z=0$ 为可去奇点

$\frac{\sin z}{z^2}=\frac{1}{z}-\frac{z}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-3}}{(2n-1)!}+\cdots$ $z=0$ 为一级极点

$\sin\frac{1}{z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}\frac{1}{z^{2n-1}}+\cdots$ $z=0$ 为本性奇点

第 5 章 留数理论（残数）

定义： 设函数 $f(z)$ 以有限项点 z_0 为孤立奇点，即 $f(z)$ 在 z_0 的去心邻域 $0<|z-z_0|<R$ 内解析，则称积分 $\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz$ 的值为函数 $f(z)$ 在点 z_0 处的留数

记作：$\mathrm{Res}(f(z),z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz$

其中，$C:|z-z_0|=\rho<R$，C 的方向是逆时针。

例 1：求函数 $f(z)=\frac{\sin z}{z^4-1}$ 在 $z=1$ 处的留数。

解：因为 z^4-1 以 $z=1$ 为一级零点，而 $\sin 1\neq 0$，因此 $f(z)$ 以 $z=1$ 为一级极点。

$$\mathrm{Res}(f(z),1)=\frac{\sin z}{(z^4-1)'}\Big|_{z=1}=\frac{\sin z}{4z^3}\Big|_{z=1}=\frac{1}{4}\sin 1$$

例 2：求函数 $f(z)=e^{z+\frac{1}{z}}$ 在 $z=0$ 处的留数

解：$z=0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点，因为

$$f(z)=e^{z+\frac{1}{z}}=e^z\cdot e^{\frac{1}{z}}=\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}+\cdots\right)$$

$(0<|z|<\infty)$

所以 $C_{-1}=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!3!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\frac{1}{n!}+\cdots$

可得 $\operatorname{Re}s\left(f(z),0\right)=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!3!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!n!}+\cdots$

第7章 傅里叶变换

通过一种途径使复杂问题简单化，以便于研究。

定义：对满足某些条件的函数 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，则称

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot e^{-i\omega t}dt$$

为傅里叶变换。

同时 $f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot e^{i\omega t}d\omega$ 为傅里叶逆变换

注：①傅里叶变换是把函数 $f(t)$ 变为函数 $F(\omega)$

②傅里叶逆变换是把函数 $F(\omega)$ 变为函数 $f(t)$

③求傅里叶变换或傅里叶逆变换，关键是计算积分

④两种常见的积分方法：凑微分、分部积分

复习积分：① $\int e^{\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha x}d(\alpha x)=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\qquad(\alpha\neq 0)$

② $\int\sin(7x+1)dx=\frac{1}{7}\int\sin(7x+1)d(7x+1)=\frac{-\cos(7x+1)}{7}$

③ $\int x\cdot e^{3x^2-3}dx=\frac{1}{2}\int e^{3x^2-3}d\left(x^2\right)=\frac{1}{6}\int e^{3x^2-3}d\left(3x^2-3\right)=\frac{e^{3x^2-3}}{6}$

④

$$\begin{aligned}
&\int x^3e^xdx\\
&=x^3e^x-\int e^xd\left(x^3\right)\\
&=x^3e^x-3\int e^xx^2dx\\
&=x^3e^x-3\left(e^xx^2-\int e^xd\left(x^2\right)\right)\\
&=x^3e^x-3e^xx^2+6\int e^xxdx\\
&=x^3e^x-3e^xx^2+6\left(xe^x-\int e^xdx\right)\\
&=x^3e^x-3e^xx^2+6xe^x-6e^x
\end{aligned}$$

⑤

$$\begin{aligned}
&\int x^2\sin xdx\\
&=x^2\sin x-\int\sin xd\left(x^2\right)\\
&=x^2\sin x-2\int x\sin xdx\\
&=x^2\sin x-2\left(x\sin x-\int\sin xdx\right)\\
&=x^2\sin x-2x\sin x-2\cos x
\end{aligned}$$

注：$\int u \cdot v dx = u \cdot v - \int u dv$

例 1：求 $f(t)=\begin{cases}1 & |t| \le s \\ 0 & |t| \rangle s\end{cases}$ 的 $F(\omega)$

解：
$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{-s} 0 \cdot e^{-i\omega t} dt + \int_{-s}^{s} 1 \cdot e^{-i\omega t} dt + \int_{s}^{+\infty} 0 \cdot e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{i}{\omega} \int_{-s}^{s} e^{-i\omega t} d(-i\omega t) \\
&= \frac{i}{\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-s}^{s} \\
&= \frac{i}{\omega} \left(e^{-i\omega s} - e^{i\omega s}\right) \\
&= \frac{2\sin(s\omega)}{\omega}
\end{aligned}
$$

例 2：求 $f(t)=\begin{cases}0 & t \langle 0 \\ e^{-\beta t} & t \ge 0\end{cases}$ $(\beta \rangle 0)$ 的 $F(\omega)$

解：
$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot e^{-i\omega t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-\beta t} e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{0}^{+\infty} e^{-(\beta + i\omega)t} dt \\
&= -\frac{1}{\beta + i\omega} e^{-(\beta + i\omega)t} \Big|_{0}^{+\infty} \\
&= \frac{\beta - i\omega}{\beta^2 + \omega^2}
\end{aligned}
$$

δ-函数

定 义 ： 如 果 对 于 任 意 一 个 在 区 间 $(-\infty,+\infty)$ 上 连 续 的 函 数 $f(t)$ ， 恒 有 $\int_{0}^{+\infty} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0)$，则称 $\delta(t)$ 为 δ-函数。

例 1：求 δ-函数的 $F(\omega)$

解：$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-0)e^{-i\omega(t-0)}=e^{-i\omega t}\Big|_{t=0}=1$

例 2：求正弦函数 $f(t)=\sin\omega_0 t$ 的傅氏变换

解：
$$\begin{aligned}F(\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot e^{-i\omega t}dt\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\omega_0 t\cdot e^{-i\omega t}dt\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega_0 t}-e^{-i\omega_0 t}}{2i}\cdot e^{-i\omega t}dt\\&=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{-i(\omega-\omega_0)t}-e^{-i(\omega+\omega_0)t}\right]dt\\&=\frac{1}{2i}\left[2\pi\delta(\omega-\omega_0)-2\pi\delta(\omega+\omega_0)\right]\\&=i\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right]\end{aligned}$$

☆ $\delta(t)\xrightarrow{F(\omega)}1 \qquad 1\xleftarrow{F^{-1}(\omega)}2\pi\delta(\omega)$

第 8 章 拉普拉斯变换

设 $f(t)$ 在 $t\geq 0$ 时有定义