复变函数与积分变换复习提纲

第一章　复变函数

一、复变数和复变函数

$$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

二、复变函数的极限与连续

极限 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$　　连续 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$

第二章　解析函数

一、复变函数 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 可导与解析的概念。

二、柯西——黎曼方程

掌握利用 C-R 方程 $\begin{cases}u_x=v_y\\ u_y=-v_x\end{cases}$ 判别复变函数的可导性与解析性。

掌握复变函数的导数：
$$f'(z)=\frac{\partial f}{\partial x}=u_x+iv_x=\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}=-iu_y+v_y$$
$$=u_x-iu_y=\cdots\cdots=iv_x+v_y$$

三、初等函数

重点掌握初等函数的计算和复数方程的求解。

1、幂函数与根式函数

$w=z^n=r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r^ne^{in\theta}$　　单值函数

$w=\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}}$　　(k=0、1、2、…、n-1)　　n 多值函数

2、指数函数：$w=e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$

性质：（1）单值.（2）复平面上处处解析，$(e^z)'=e^z$（3）以 $2\pi i$ 为周期

3、对数函数

$w=Lnz=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)=\ln z+i2k\pi$　　（k=0、±1、±2……）

性质：（1）多值函数,（2）除原点及负实轴处外解析,（3）在单值解析分枝上: $(\ln z)'_k=\dfrac{1}{z_k}$ 。

4、三角函数：$\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$　　$\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

性质：（1）单值 （2）复平面上处处解析 （3）周期性 （4）无界

5、反三角函数（了解）

反正弦函数 $w=Arc\sin z=\dfrac{1}{i}Ln(iz+\sqrt{1-z^2})$

反余弦函数 $w = Arc\cos z = \frac{1}{i} Ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$

性质与对数函数的性质相同。

6、一般幂函数：$z^s = e^{sLnz} = e^{s[\ln|z| + (2k\pi + \arg z)i]}$ （k=0、±1⋯）

四、调和函数与共轭调和函数：

1) 调和函数:$\nabla^2 u(x,y) = 0$

2) 已知解析函数的实部（虚部），求其虚部（实部）
有三种方法：a）全微分法
b）利用 C-R 方程
c）不定积分法

第三章 解析函数的积分

一、复变函数的积分 $\int_l f(z)\mathrm{d}z = \int_l udx - vdy + i\int_l vdx + udy$ 存在的条件。

二、复变函数积分的计算方法

1、沿路径积分：$\int_c f(z)dz$ 利用参数法积分，关键是写出路径的参数方程。

2、闭路积分： a) $\oint_c f(z)dz$ 利用留数定理，柯西积分公式，高阶导数公式。

b) $\oint_c [u(x,y) + iv(x,y)]dz$ 利用参数积分方法

三、柯西积分定理：

$$\oint_c f(z)dz = 0$$

推论 1：积分与路径无关

$$\int_c f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$$

推论 2：利用原函数计算积分

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$

推论 3：二连通区域上的柯西定理

$$\oint_{c_1} f(z)dz = \oint_{c_2} f(z)dz$$

推论 4：复连通区域上的柯西定理

$$\oint_c f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{c_k} f(z)dz$$

四、柯西积分公式： $f\ (z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$ $\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$

五、高阶导数公式：　$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_c \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi$

解析函数的两个重要性质：

- 解析函数 $f(z)$ 在任一点 z 的值可以通过函数沿包围点 z 的任一简单闭合回路的积分表示。
- 解析函数有任意阶导数。

本章重点：掌握复变函数积分的计算方法

沿路径积分 $\int_c f(z)dz$　1）利用参数法积分 2）利用原函数计算积分。

闭路积分 $\oint_c f(z)dz$　利用留数定理计算积分。

第四章 解析函数的级数

一、幂级数及收敛半径：　$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n$

1、一个收敛半径为 R（≠0）的幂级数，在收敛圆内的和函数 $f(z)$ 是解析函数，在这个收敛圆内，这个展开式可以逐项积分和逐项求导，即有：

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n (z-b)^n \qquad |z-b|<R$$

$$\int_0^z f(z)dz=\sum_{n=0}^{\infty}\int_l^z a_n(z-b)^n dz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}z^{n+1} \qquad |z-b|<R$$

2、收敛半径的计算方法

1） 比值法：$R=\lim_{n\to\infty}|a_n/a_{n+1}|$

2） 根值法：$R=1/\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$

二、泰勒（Taylor）级数

1、如函数 $f(z)$ 在圆域 $|z-b|<R$ 内解析，那么在此圆域内 $f(z)$ 可以展开成 Taylor 级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-b)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(b)}{n!}(z-b)^n$$

1）展开式是唯一的。故将函数在解析点的邻域中展开幂级数一定是 Taylor 级数。

2）收敛半径是展开点到 $f(z)$ 的所有奇点的最短距离。

3）展开式的系数可以微分计算：　$a_n=\frac{f^n(b)}{n!}$

4）解析函数可以用 Taylor 级数表示。

2、记住一些重要的泰勒级数：

1）$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$　　2）$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

3）$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{(2n+1)}$　　4）$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$

三、罗兰（Laurent）级数

如果函数 $f(z)$ 在圆环城 $R_1<|z-b|<R_2$ 内解析，则 $f(z)=\sum_{n=-x}^{\infty}c_n(z-b)^n$　$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{f(z)}{(z-b)^{n+1}}dz$

（n=0、±1、±2……）

1、展开式是唯一的，即只要把函数在圆环城内展开为幂级数即为 Laurent 级数。

2、展开式的系数是不可以利用积分计算。利用已知的幂级数，通过代数运算把函数展开成 Laurent 级数。

3、注意展开的区域，在展开点的所有解析区域展开。

四、孤立奇点

1、定义：若 b 是 $f(z)$ 的孤立奇点，则 $f(z)$ 在 $0<|z-b|<\delta$ 内解析。在此点 $f(z)$ 可展开为罗兰级数，

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-b)^n=\sum_{n=\infty}^{-1}c_n(z-b)^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-b)^n$$

2、分类：

$$\text{孤立奇点}\begin{cases}\text{可去奇点:无负幂项,}\mathrm{Re}\,s[f(z),b]=0\\ \text{极点:有限负幂项}\\ \text{本性奇点:无穷多负幂项,}\mathrm{Re}\,s[f(z),b]=c_{-1}\end{cases}$$

把函数在奇点的去心邻域中展开为罗兰级数，求解 C-1

3、极点留数计算

a) 如果 b 是 $f(z)$ 的一阶极点，则 $\mathrm{Re}\,s[f(z),b]=\lim_{z\to b}(z-b)f(z)$

b) 如果 b 是 $f(z)$ 的 m 阶极点，则

$$\mathrm{Re}\,s[f(z),b]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to b}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-b)^m f(z)]$$

c) 如 b 是 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ 的一阶极点，且 P(b)≠0，那么

$$\mathrm{Re}\,s\left[\frac{P(z)}{Q(z)},b\right]=\frac{P(b)}{Q'(b)}$$

d) $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathrm{Res}[f(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2},0]$

e) 若 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点，并且 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$，

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-C_{-1}=-\lim_{z\to\infty} zf(z)$$

关系：全平面留数之和为零。

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Res}[f(z),b_k]+\sum\mathrm{Res}[f(z),\infty]=0$$

本章重点：函数展开成 Taylor 级数，并能写出收敛半径。
函数在解析圆环城内展开成 Laurent 级数。
孤立奇点（包含 $z=\infty$ 点）的判定及其留数的计算。

第五章　留数定理的应用

一、$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$

条件：（1）R(sinθ，cosθ) 为 cosθ 与 sin θ 的有理函数
（2）R (•) 在[0，2π] 或者 [-π ，π] 上连续。

令 $z=e^{i\theta}$，则 $\sin\theta=\frac{z-z^{-1}}{2i}$， $\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2}$， $d\theta=\frac{dz}{iz}$ 。

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta=\oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2-1}{2iz},\frac{z^2+1}{2z}\right)\frac{dz}{iz}=\oint_{|z|=1} f(z)dz$$

$$=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k] \qquad |z_k|<1$$

注意留数是计算单位圆中的奇点。

二、$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

条件： （1） $f(x)=P(x)/Q(x)$ 　 $P(x),Q(x)$ 是 x 的多项式。

（2） $Q(x)\neq 0$

（3） 分母阶次比分子阶次至少高二次

则 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=2\pi i\sum_{R=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),b_k]$ 　 b_k 是 $f(z)$ 在上半平面的奇点。

三、$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{i\alpha x}dx$ 　 （$\alpha>0$）

条件：（1） $R(x)=P(x)/Q(x)$，且 $Q(x)$ 比 $P(x)$ 至少高一阶，

（2） $Q(x)\neq 0$，（3） $\alpha>0$

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}R(x)e^{i\alpha x}dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left[R(z)e^{i\alpha z},b_k\right]\Bigg|\quad \operatorname{Im}b_k>0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\cos\alpha x dx=\operatorname{Re}I,\ \int_{-\infty}^{\infty}R(x)\sin\alpha x dx=\operatorname{Im}I$$

重点关注第一和第三种类型

第七章　Fourier 变换

一、傅立叶变换

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

二、δ 函数的傅立叶变换

$$\mathscr{F}[\delta(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)e^{-j\omega x}dx=1. \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega x}d\omega=\delta(x)$$

三、一些傅立叶变换及逆变换

$$\mathscr{F}[H(x)]=\frac{1}{i\omega}+\pi\delta(\omega)$$

$$\mathscr{F}^{-1}[\frac{1}{i\omega}]=H(x)-\frac{1}{2}$$

四、性质：$\mathscr{F}[f(x)]=F(\omega)$

1、 相似性质

$$\mathscr{F}[f(ax)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

2、 $\mathscr{F}[f(x\pm x_0)]=e^{\pm j\omega x_0}F(\omega)$　　延迟性质

$\mathscr{F}\ [e^{\mp j\omega_0 x}f(x)]=F(\omega\pm\omega_0)$　　位移性质

3、微分性质

$$\mathscr{F}\ [f'(x)]=j\omega F(\omega) \qquad \mathscr{F}\ [-jxf(x)]=F'(\omega)$$

$$\mathscr{F}\ [f^{(n)}(x)]=(j\omega)^nF(\omega) \qquad \mathscr{F}\ [(j-x^n)f(x)]=\frac{d^nF(\omega)}{d\omega^n}$$

4、积分性质

$$\mathscr{F}\ \left[\int_{x_0}^{x}f(x)dx\right]=\frac{1}{j\omega}F(\omega)$$

由 Fourier 变换的微分和积分性质，我们可以利用 Fourier 变换求解微积分方程。

四、卷积和卷积定理

$$f_1(x)*f_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(x-\tau)d\tau$$

$$\mathscr{F}\ [f_1(x)*f_2(x)]=F_1(\omega)F_2(\omega)$$

$$\mathscr{F}\ [f_1(x)f_2(x)]=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$$

*五、三维 Fourier 变换及反演

本章重点：利用定义计算 Fourier 变换

第八章　Laplace 变换

一、拉普拉斯变换

$$\mathscr{L}\left[f(x)\right]=\int_0^{\infty}f(x)e^{-pt}dt=F(p)$$

二、几个重要的拉普拉斯变换及逆变换

$$\mathscr{L}\left[H(t)\right]=\frac{1}{p}\qquad \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right]=H(t)$$

$$\mathscr{L}\left[e^{\pm\alpha t}\right]=\frac{1}{p\mp\alpha}\qquad \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{p\pm\alpha}\right]=e^{\mp\alpha t}$$

$$\mathscr{L}\left[\cos\alpha t\right]=p\big/p^2+\alpha^2\qquad \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{p}{p^2+\alpha^2}\right]=\cos\alpha t$$

$$\mathscr{L}\left[\sin\alpha t\right]=\alpha\big/p^2+\alpha^2\qquad \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}\right]=\sin\alpha t$$

$$\mathscr{L}\left[t^m\right]=m!\big/p^{m+1}\qquad \mathscr{L}\left[\delta(t)\right]=1$$

四、拉普拉斯变换的性质

1、$\mathscr{L}\left[f(t-t_0)\right]=e^{-pt_0}F(p)$

2、$\mathscr{L}\left[e^{\mp p_0 t}f(t)\right]=F(p\pm p_0)$

3、$\mathscr{L}\left[f'(t)\right]=pF(p)-f(0)$

$$\mathscr{L}\left[f^{u}(t)\right]=p^2F(p)-pf(0)-f'(0)$$

$$\mathscr{L}\left[(t)^n f(t)\right]=\frac{d^uF(p)}{dp^n}$$

4、$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right]=\frac{1}{p}F(p)$

$$\mathscr{L}\left[\frac{f(t)}{t}dt\right]=\int_{\rho}^{\infty}F(p)dp$$

五、卷积： $f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

$$\mathscr{L}\left[f_1(t)*f_2(t)\right]=F_1(p)F_2(p)$$

六、Laplace 反演

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty}F(p)e^{pt}dp=\sum_{n=1}^{n}\mathrm{Re}\,s\left[F(p)e^{pt},p_n\right]$$

七、Laplace 逆变换

（1）部分分式法

（2）卷积定理

（3）Laplace 反演公式（留数定理）

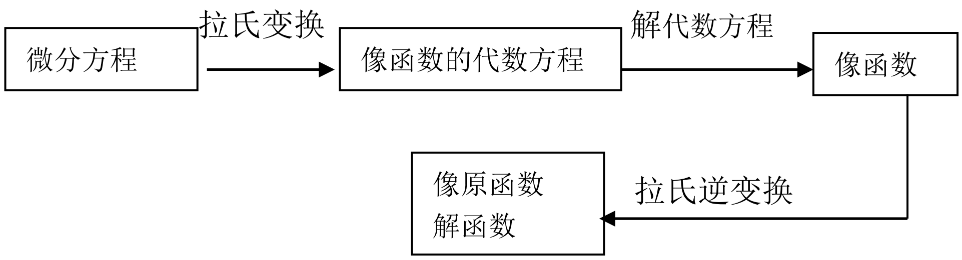
（4）利用 Laplace 变换的性质

八、利用 Laplace 变换求解微积分方程

（1）对方程取 Laplace 变换，得到象函数的代数方程

（2）解代数方程，得到像函数的表达式

（3）求像函数的拉普拉斯逆变换



本章重点：利用定义和性质计算 Laplace 变换。

计算 Laplace 逆变换。

利用 Laplace 变换求解微积分方程。