一、选择题（共 13 小题，每小题 2 分，共 26 分）

1.序列和 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n-1)$ 等于(　　A　　)

(A) 1；　　(B) ∞　　(C) $u(n-1)$　　(D) $nu(n-1)$

2.若 $y(t)=f_1(t)*f_2(t)$，则 $f_1(2t)*f_2(2t)$ 等于(　　A　　)

(A) $\frac{1}{2}y(2t)$；　　(B) $\frac{1}{4}y(2t)$；　　(C) $\frac{1}{4}y(4t)$；　　(D) $\frac{1}{2}y(4t)$

3.下列关于周期矩形脉冲信号的论述中，正确的是（ C ）

A、脉冲周期增大则主瓣宽度变小　　B、脉冲周期增大则主瓣宽度变大

C、脉冲宽度增大则主瓣宽度变小　　D、脉冲宽度增大则主瓣宽度变大

解释：主瓣宽度与脉冲宽度成反比，谱线间隔与脉冲周期成反比

4.一段语音信号的波形为 $x(t)$，则波形为 $x(2t)$ 的语音信号听起来（ C ）。

A、语速不变，音量变大　　B、语速不变，音量变小

C、语速变快，音调变高　　D、语速变慢，音调变低

解释：$x(t)$ 到 $x(2t)$，时间压缩到 1/2，内容不变，故语速变快；时域变窄，频域变宽，故音调变高。

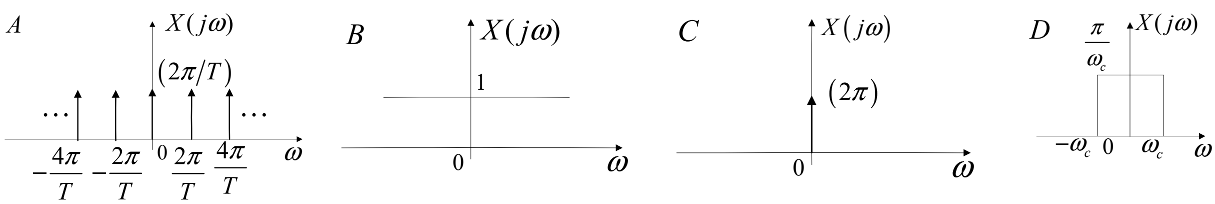
5.已知 $x(t)$ 的傅里叶变换为 $X(j\omega)$，则 $e^{j4t}x(t-2)$ 的傅里叶变换为：(　　B　　)

A、$X[j(\omega-4)]e^{-2(j\omega-4)}$　　B、$X[j(\omega-4)]e^{-2j(\omega-4)}$

C、$X[j(\omega+4)]e^{2j(\omega+4)}$　　D、$X[j(\omega+4)]e^{-2j(\omega+4)}$

解释：$x(\mathrm{t}-2)\leftrightarrow X(j\omega)e^{-j2\omega}$，再由频移性质 $x(t)e^{j\omega_0 t}\leftrightarrow X[j(\omega-\omega_0)]$ 得出答案

6.周期冲激串 $x(t)=\sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{\infty}\delta(\mathrm{t-kT})$ 的频谱为（ A ）



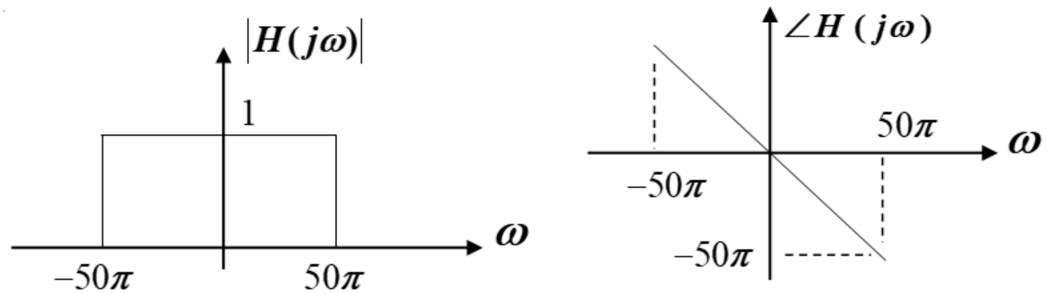
解释：周期冲激串的傅里叶变换仍然是周期冲激串，只不过强度变成原来的

$2\pi / T$， 周期由T变成$2\pi / T$ 。

7.已知连续时间线性时不变系统的频率特性如右图所示，则该系统可以对下列哪个信号实现无失真传输（　B　　）。

A、 $\cos(200t)$　　　　　　B、 $Sa(30\pi t)$

C、 $Sa(100\pi t)$　　　　　　D、 $G_{50}(t)$



解释：系统在-50π 到 50π 之间满足无失真传输条件。故应判断 4 个选项的角频率范围是否满足要求。A 的角频率是 200，大于 50π；B 的频谱是门信号，且在-30π 到 30π 之间。满足要求。C 的频谱在-100π 到 100π 之间，不满足要求。D 的频谱是 Sa 函数，覆盖了整个频谱范围。

8.已知 LTI 系统的系统函数 $H(s)$ 有两个一阶极点 $s_1 = -\frac{1}{2}$， $s_2 = -2$， 则：（ D ）

A、该系统一定为因果系统；　　　B、该系统一定为稳定系统；

C、该系统一定为不稳定系统；　　D、以上说法都不对

9.已知因果系统的系统函数为 $H(s) = \frac{s}{s+3}$，则该系统所属的滤波器类型是（　B　）

A 低通滤波器　　B 高通滤波器　C 带通滤波器　　D 全通系统

10.下列关于拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系，说法正确的是（ D ）

A 任何信号都存在拉普拉斯变换，但不一定存在傅里叶变换

B 拉普拉斯变换存在，则傅里叶变换一定存在

C 拉普拉斯变换和傅里叶变换都存在时，一定有 $X(j\omega) = X(s)|_{s=j\omega}$

D 当拉普拉斯变换的收敛域包含虚轴时，拉普拉斯变换和傅里叶变换都存在，并且 $X(j\omega) = X(s)|_{s=j\omega}$

11.下列序列中，z 变换的收敛域为$|z|>\frac{1}{2}$的是 （ A ）

(A) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)+\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$；　　(B) $\left(\frac{1}{2}\right)^n [u(n)-u(n-10)]$

(C) $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$；　　(D)$\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)+\left(\frac{2}{3}\right)^n u(n)$

12.已知序列$x(n)u(n)$的单边 z 变换为$X(z)$，则$x(n+1)u(n)$和$x(n-1)u(n)$的单边 z 变换分别是 （ C ）

(A) $x(n+1)\leftrightarrow zX(z)$，$x(n-1)\leftrightarrow z^{-1}X(z)$

(B) $x(n+1)\leftrightarrow z[X(z)-x(0)]$，$x(n-1)\leftrightarrow z^{-1}[X(z)+x(-1)]$

(C) $x(n+1)\leftrightarrow z[X(z)-x(0)]$，$x(n-1)\leftrightarrow z^{-1}[X(z)+zx(-1)]$

(D) $x(n+1)\leftrightarrow z[X(z)+x(0)]$，$x(n-1)\leftrightarrow z^{-1}[X(z)-zx(-1)]$

13.离散时间稳定系统的系统函数收敛域（ C ）

(A)一定包含原点

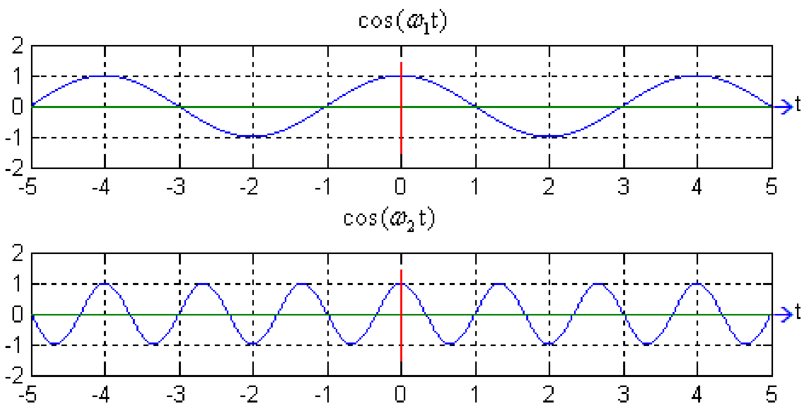
(B)一定包含无穷远点

(C)一定包含单位圆

(D)一定在单位圆内

二、填空题（共 5 个空，每空 2 分，共 10 分）

1、下图所示两个正弦信号中，角频率分别为ω_1和ω_2的两个信号所对应的周期分别是$T_1=($ $)$，$T_2=($ $)$。



解释：T1=4；T2=4/3

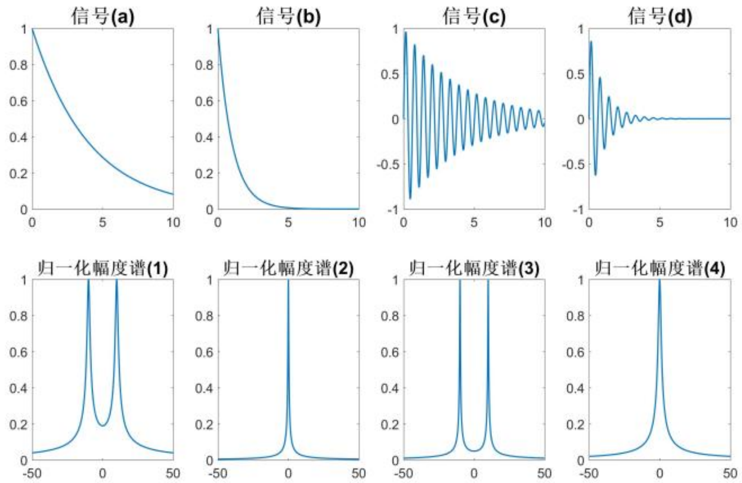
2、若$x_1(t)\leftrightarrow X_1(j\omega)$，则$X_2(j\omega)=2X_1(2j\omega)e^{-j4\omega}$的原函数$x_2(t)=($ $)$。

解释：直接利用$x(at+b)\leftrightarrow\frac{1}{|a|}X(j\frac{\omega}{a})e^{j\frac{b}{a}\omega}$，$\underline{x_2(t)=x_1\left(\frac{1}{2}t-2\right)}$

3.写出以下信号的拉普拉斯变换：① $\delta(t)\leftrightarrow\underline{1,\ \ \mathrm{Re}[s]>-\infty}$ ② $u(t)\leftrightarrow\underline{\frac{1}{s},\ \ \mathrm{Re}[s]>0}$ ③ $e^{2t}u(t)\leftrightarrow\underline{\frac{1}{s-2},\ \ \mathrm{Re}[s]>2}$ ④ $e^{-2t}u(t)\leftrightarrow\underline{\frac{1}{s+2},\ \ \mathrm{Re}[s]>-2}$

三、简答题（共 3 题，每空 4 分，共 12 分）：

1.四个信号的波形图和归一化幅度特性分别如下图中的(a)、(b)、(c)、(d)和(1)、(2)、(3)、(4)所示，请将其对应关系列出来，并说明原因。



参考答案：a 对应 2，b 对应 4 ； c 对应 3；d 对应 1。

简答要点①：信号(a)和(b)的直流分量比(c)和(d)的要高很多，因此在零频附近出现峰值。因此(a)和(b)应该对应(2)和(4)，(c)和(d)对应图(1)和(3)。要点②：(a)图中，能量分布所占据的时宽更宽，因此归一化频谱更窄一些（或者说直流分量所占功率更高一些），因此(a)对应于(2)，(b)对应于(4)。要点③：信号(c)和(d)为衰减信号乘以正弦信号，有傅里叶变换的性质可知，两个信号都包含正负相等的两个频率，信号(c)的衰减信号分量时域更宽，因此其两个频率分量的峰值更加窄一些。因此(c)对应着(3)，而(d)对应图 1。

2.若 $f(t)$ 的最高频率 $\omega_{\max}=2000\pi$ rad/s 的带限信号，求对 $f(t)$ 、$f(2t)$ 取样的奈奎斯特抽样率，并用简要概念说明之。

参考答案：对 f(t)而言，奈奎斯特取样率为 2kHz；对 f(2t)来说，奈奎斯特采样率为 4kHz。相对于 f(t)来说，f(2t)在时域进行了压缩，在频域进行了扩展。f(2t)的最高频率为 2kHz，由时域采样定理可知奈奎斯特采样率为 4kHz。

3.若 $f_1(t)\leftrightarrow F_1(j\omega)$， $f_2(t)\leftrightarrow F_2(j\omega)$，证明： $f_1(t)*f_2(t)\leftrightarrow F_1(j\omega)F_2(j\omega)$。

4.某一系统的系统函数为 $H(z)=\dfrac{z^3-2z^2+z}{z^2-\frac{1}{4}z-\frac{1}{8}},|z|>\dfrac{1}{2}$，判断系统的因果性和稳定性，并给出原因。

解：该系统不是因果的，因为 $H(z)$分子的阶次高于分母的阶次；收敛域包含单位圆，所以为稳定系统。

四、计算题（共 4 小题，每题 5 分，共 20 分）

1.求 $f(t)=\left(\dfrac{\sin 3\pi t}{2\pi t}\right)^2$ 的傅里叶变换，画出其频谱。

解：

$$f_1(t)=\frac{\sin 3\pi t}{2\pi t}=\frac{3}{2}\frac{\sin 3\pi t}{3\pi t}\overset{\tau=6\pi}{=}\frac{3}{2}\frac{\sin(\tau t/2)}{(\tau t/2)}=\frac{1}{4\pi}\tau\,\mathrm{sa}\left(\frac{\tau t}{2}\right)\leftrightarrow F_1(j\omega)=\frac{1}{4\pi}2\pi G_{6\pi}(\omega)=\frac{1}{2}G_{6\pi}(\omega)$$

$$f(t)=f_1(t)\times f_1(t)\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}F_1(j\omega)*F_1(j\omega)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2}G_{6\pi}(\omega)\right)*\left(\frac{1}{2}G_{6\pi}(\omega)\right)=\frac{3}{4}\Lambda_{12\pi}(\omega)，$$

其中 $\Lambda_{12\pi}(0)=1$ 。

2.已知 $X(z)=\dfrac{z^3}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\left(z-\frac{3}{4}\right)},|z|>\dfrac{3}{4}$，求其反变换 $x(n)$。

解答：

$$X(z)=z\frac{z^2}{\left[z-\frac{1}{2}\right]^2\left(z-\frac{3}{4}\right)}=z\left[\frac{A}{z-\frac{3}{4}}+\frac{C_2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{C_1}{z-\frac{1}{2}}\right]$$

$$=z\left[\frac{9}{z-\frac{3}{4}}+\frac{-1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{-8}{z-\frac{1}{2}}\right]$$

$$x(n)=9\left(\frac{3}{4}\right)^n u(n)-n\frac{1}{2^{n-1}}u(n)-8\frac{1}{2^n}u(n)$$

3.设某信号为 $f(t)=e^{at}u(-t)+e^{-bt}u(t),a>0,b>0$，当 a 和 b 满足什么关系时，$f(t)$ 存在双边拉氏变换？求其双边拉氏变换，并给出收敛域。

解：信号可以化简为

$$f(t)=f_1(t)+f_2(t)=e^{at}u(-t)+e^{-bt}u(t),a>0,b>0$$

① 求因果信号的拉氏变换

$$F_{b_2}(s)=F_2(s)=\mathcal{L}\left[e^{-bt}u(t)\right]=\int_{0-}^{\infty}e^{-bt}e^{-st}dt=\frac{1}{s+b},\mathrm{Re}(s)>-b$$

② 求反因果信号的拉氏变换

$$F_1(s)=\mathcal{L}\left[f_1(-t)\right]=\int_{0-}^{\infty}e^{-at}e^{-st}dt=\frac{1}{s+a},\mathrm{Re}(s)>-a$$

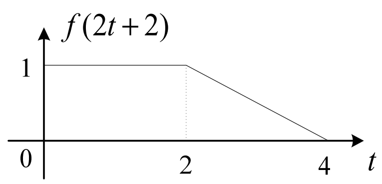
$$F_{b_1}(s)=F_1(-s)=\frac{1}{-s+a},\mathrm{Re}(s)<a$$

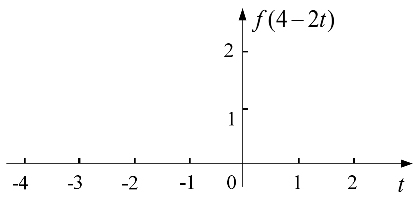
③ 得双边拉氏变换

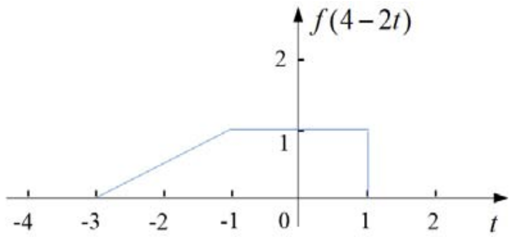
$$F_b(s)=F_{b_1}(s)+F_{b_1}(s)=\frac{1}{s+b}-\frac{1}{s-a},-b<\mathrm{Re}(s)<a\text{。}$$

条件 $-b<a$

4.已知信号 $f(2t+2)$ 的波形如下图所示，试画出信号 $f(4\text{-}2t)$ 的波形。





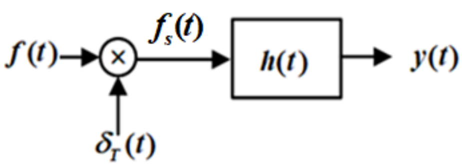


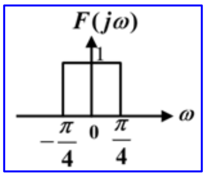
五、综合计算题（14 分）

1、某连续时间系统如下图示，输入信号 $f(t)$ 被抽样后，通过一个单位冲激响应为 $h(t)$ 的系统，输出 $y(t)$。已知 $f(t)\leftrightarrow F(j\omega)=G_{\pi/2}(\omega)$， $h(t)=2G_1(t)$。 $\delta_T(t)$ 为单位强度周期脉冲串，且 $T=2$。

(1)请画出 $\omega\in(-2\pi,2\pi)$ 区间上 $y(t)$ 的频谱

(2)给出从 $y(t)$ 恢复 $f(t)$ 的方案



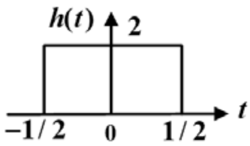
解：(1)画出信号频谱 $F(j\omega)$：

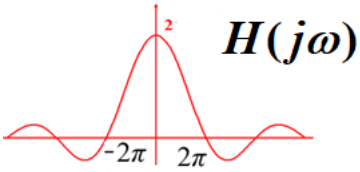
(2)抽样信号 $f_s(t)$ 的频谱 Ω=2π/T=π

$$F_s(j\omega)=\frac{1}{2\pi}F(j\omega)*\Omega\delta_\Omega(\omega)=\frac{1}{T}F(j\omega)*\delta_\pi(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}G_{\pi/2}(\omega-n\pi)$$

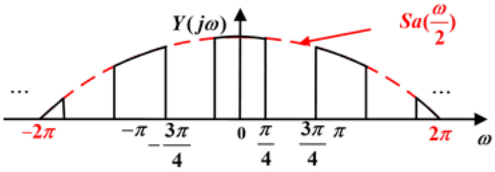
(3)画出滤波器 $H(j\omega)$ 频谱图

$$H(j\omega)=\mathscr{F}\left[2G_1(t)\right]=2\,\mathrm{sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

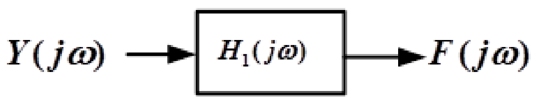


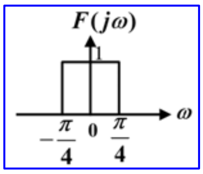


(4)给出 $Y(j\omega)=F_s(j\omega)H(j\omega)=\mathrm{sa}\left(\frac{\omega}{2}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}G_{\pi/2}(\omega-n\pi)$

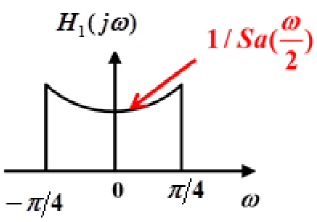


(5) $Y(j\omega)$ 经过系统后输出为下面右图。





(6)所以该系统 $H_1(j\omega)$ 如下图所示



2、系统 $y(n)-y(n-1)-2y(n-2)=x(n)+2x(n-2)$，初始状态为 $y(-1)=2$，$y(-2)=-1/2$。输入 $x(n)=u(n)$，求系统的全响应、零输入响应和零状态响应。

解：对差分方程两端做单边 Z 变换：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{Y(z)-z^{-1}\left[Y(z)+y(-1)z^{+1}\right]-2z^{-2}\left[Y(z)+y(-1)z^{+1}+y(-2)z^{+2}\right]}\\&\quad\boldsymbol{=X(z)+2z^{-2}\left[X(z)+x(-1)z^{+1}+x(-2)z^{+2}\right]}\end{aligned}$$

化简：

$$\boldsymbol{Y(z)=\underbrace{\frac{1+2z^{-2}}{1-z^{-1}-2z^{-2}}X(z)}_{Y_x(z)}+\underbrace{\frac{y(-1)+2z^{-1}y(-1)+2y(-2)}{1-z^{-1}-2z^{-2}}}_{Y_0(z)}}$$

零输入响应：

$$\boldsymbol{Y_0(z)=\frac{y(-1)+2z^{-1}y(-1)+2y(-2)}{1-z^{-1}-2z^{-2}}=\frac{2+4z^{-1}-1}{1-z^{-1}-2z^{-2}}\Rightarrow y_0(n)=(-1)^{n+1}u(n)+2^{n+1}u(n)}$$

将 $x(n)=u(n)\leftrightarrow X(z)=z/(z-1)$带入上式可得

$$\boldsymbol{Y(z)=\frac{4z}{z-2}-\frac{1}{2}\frac{z}{z+1}-\frac{3}{2}\frac{z}{z-1}}$$

零状态响应：

$$\boldsymbol{Y_x(z)=\frac{1+2z^{-2}}{1-z^{-1}-2z^{-2}}X(z)=\frac{1+2z^{-2}}{1-z^{-1}-2z^{-2}}\frac{1}{1-z^{-1}}\Rightarrow y_x(n)=\left[-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(-1)^n+2^{n+1}\right]u(n)}$$

全响应：

$$\boldsymbol{y(n)=y_0(n)+y_x(n)=\underbrace{2^{n+2}u(n)-\frac{1}{2}(-1)^n u(n)}_{\text{自然响应}}\underbrace{-\frac{3}{2}u(n)}_{\text{强迫响应}}}$$

注：传递函数两个极点 $z=2$，$z=-1$，对应两个自然响应项。