中山大学本科生考试草稿纸

第一次测试题(B)

一、选择题：

1~6：C，B，C，A，C，AC

二、填空题：

1. $\sum_{k=-\infty}^{n} 3^k \delta(k-2) = 9u(n-2)$

解析：当 $n<2$ 时 $\delta(k-3)$ 恒为零

当 $n\geq 2$ 时 当且仅当 $k=2$ 时，$\delta(k-2)=1$，

此时 $3^k=9$，故有上述等式

2. ~~$\int_{-4}^{4} t^2\delta'(t+2)$~~ $\int_{-4}^{4} t^2\delta'(t+2)\,dt = t^2\delta(t+2)\Big|_{-4}^{4} - \int_{-4}^{4} 2t\,\delta(t+2)\,dt$

$$= 0-0-2\times(-2)=4$$

3. $\int_{-\infty}^{\infty} \sin\pi t\,\delta(1-2t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sin\pi t\,\delta(2t-1)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\sin\pi t\,\delta(t-\frac{1}{2})\,dt$

$$= \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}$$

4. $x(n)=\cos\frac{n\pi}{6}+\sin\frac{n\pi}{12}-\cos\frac{n\pi}{3}$，其周期为 24。

解析
$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\pi/6} = 12 \\ T_2 &= \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\pi/12} = 24 \\ T_3 &= \frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6 \end{aligned}\right\} \text{最小公倍数为 } 24$$

5. $\int_{-2\pi}^{0} t\sin\frac{t}{2}\delta(-\pi-t)dt=\int_{-2\pi}^{0} t\sin\frac{t}{2}\delta(t+\pi)dt$

$= -\pi\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)=\pi$

6. $e^{-2t}u(t)*4=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\tau}u(\tau)\times4d\tau=-2\int_{0}^{\infty}e^{-2\tau}d(-2\tau)=-2e^{-2\tau}\Big|_{0}^{\infty}=2$

7. 已知 $x(t)=(3t^2+2)u(t)$，则 $x''(t)=\underline{6u(t)+2\delta'(t)}$

解析：$x'(t)=(3\times2t)u(t)+(3t^2+2)\delta(t)$

$=6tu(t)+2\delta(t)$

$x''(t)=6u(t)+\underbrace{6t\delta(t)}_{0}+2\delta'(t)=6u(t)+2\delta'(t)$

三、简答题：

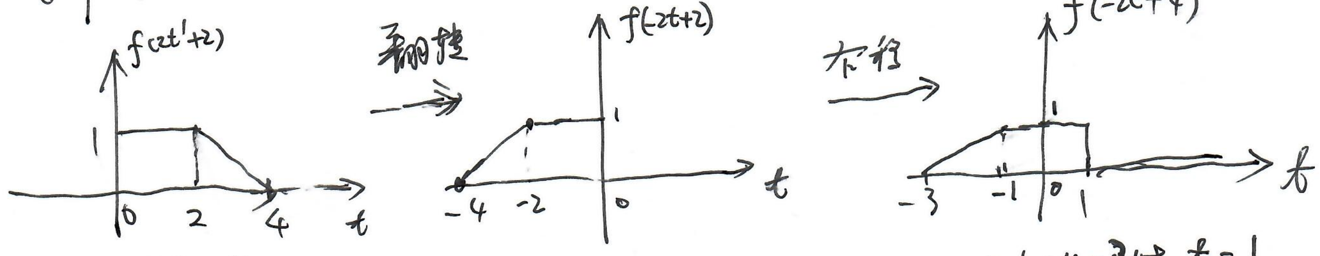
1. $y(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$ 为：①线性、②时不变、③因果 ④不稳定系统。

解析：关于④，设 $f(t)=1$，则 $|f(t)|<2$，此时 $|y(t)|$ 不收敛。

2. 已知 $f(2t+2)$，求 $f(4-2t)$.

令：$4-2t=2t'+2$

则：$t=1-t'$，意味着 $f(2t'+2)$ ①翻转再②右移即可得到 $f(4-2t)$，故：



亦可用特殊点法：

~~f(t)=f~~

$f(2\times0+2)=f(2)=1$

$f(2\times2+2)=f(6)=1$

$f(2\times4+2)=f(10)=0$

$-2t+4=2$ 时 $t=1$

$-2t+4=6$ 时 $t=-1$

$-2t+4=10$ 时 $t=-3$.

把 $t=1,-1,-3$ 对应函数值描点图上即得解.

3. (A): $y(t)=\sin t f(t)$ 为 ①线性、②时变 ③因果系统

(B) $y(n)=\sum_{k=-M}^{M} x(n-2k)$ ①线性 ②时变 ③非因果

若分析了 $M=0$ 的情况，则 $M=0$ 时为因果（不做要求）

四：1. 解：

$\left.\begin{matrix} f(t) \\ y_0(t) \end{matrix}\right\} \rightarrow y_1(t)=5e^{-t}+\cos 2t$ ①

$\left.\begin{matrix} 2f(t) \\ y_0(t) \end{matrix}\right\} \rightarrow y_2(t)=e^{-t}+2\cos 2t$ ②

由①和②可得

$\left.\begin{matrix} f(t) \\ 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow y_3(t)=-4e^{-t}+\cos 2t$ ③

由①和③可得

$\left.\begin{matrix} f(t)=0 \\ y_0(t) \end{matrix}\right\} \rightarrow y_4(t)=y_1(t)-y_3(t)=9e^{-t}$ ④

由④和③可得

$\left.\begin{matrix} 5f(t) \\ 3y_0(t) \end{matrix}\right\} \rightarrow y_5(t)=5y_3(t)+3y_0(t)=7e^{-t}+5\cos 2t$.

四：2、$y''(t)-2y'(t)-3y(t)=f'(t)+2f(t)$，已知 $y(t)=u(t)$，$y(0^-)=1$，$y'(0^-)=2$，求 $y_0(t)$

解：① 列特征方程．

$$\lambda^2-2\lambda-3=0$$

② 求特征根

$$\lambda_1=3,\ \lambda_2=-1$$

③ 列齐次解

$$y_0(t)=A_1e^{3t}+A_2e^{-t}$$

④ 代入初始条件

$$\begin{cases}A_1+A_2=1\\3A_1-A_2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=\frac{3}{4}\\A_2=\frac{1}{4}\end{cases}$$

$\therefore\ y_0(t)=\frac{3}{4}e^{3t}+\frac{1}{4}e^{-t}$

中山大学本科生考试草稿纸

四：3、已知 $f_1(t)=e^{-2at}u(t)$，$f_2(t)=\cos t\,u(t-3\pi)$，求 $f_1(t)*f_2(t)$

解：$y(t)=f_1(t)*f_2(t)=[e^{-2at}u(t)]*[\cos t\,u(t-3\pi)]$

$$=[e^{-2at}u(t)]*[-\cos(t-3\pi)\,u(t-3\pi)]$$

$$=-[e^{-2at}u(t)]*[\cos t\,u(t)]*\delta(t-3\pi)$$

令 $A(t)=[e^{-2at}u(t)]*[\cos t\,u(t)]$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2a\tau}u(\tau)\cdot\cos(t-\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau$$

$$=\left[\int_0^t e^{-2a\tau}\cos(t-\tau)\,d\tau\right]u(t)$$

$$=\left[\int_0^t e^{-2a\tau}\cos(\tau-t)\,d\tau\right]u(t)\triangleq B(t)\,u(t)$$

其中 $B(t)=\int_0^t e^{-2a\tau}\cos(\tau-t)\,d\tau=\int_0^t e^{-2a\tau}\,d\sin(\tau-t)$

$$=e^{-2a\tau}\sin(\tau-t)\Big|_0^t-\int_0^t(-2a)\,e^{-2a\tau}\sin(\tau-t)\,d\tau$$

$$=\sin t+2a\int_0^t e^{-2a\tau}(-1)\,d[\cos(\tau-t)]$$

$$=\sin t-2a\left[e^{-2a\tau}\cos(\tau-t)\Big|_0^t-\int_0^t(-2a)\,e^{-2a\tau}\cos(\tau-t)\,d\tau\right]$$

$$=\sin t-2a\left[e^{-2at}-e^0\cos(t)+2a\underbrace{\int_0^t e^{-a\tau}\cos(\tau-\tau)\,d\tau}_{B(t)}\right]$$

故：$B(t)=\sin t-2ae^{-2at}+2a\cos t-4a^2B(t)$

$$\Rightarrow B(t)=\frac{1}{4a^2+1}\left[\sin t-2ae^{-2at}+2a\cos t\right]$$

故 $A(t)=B(t)u(t)=\frac{1}{4a^2+1}\left[-2ae^{-2at}+2a\cos t+\sin t\right]u(t)$

$$y(t)=f_1(t)*f_2(t)=-A(t)*\delta(t-3\pi)=\frac{1}{4a^2+1}\left[2ae^{-2a(t-3\pi)}+2a\cos t+\sin t\right]u(t-3\pi)$$

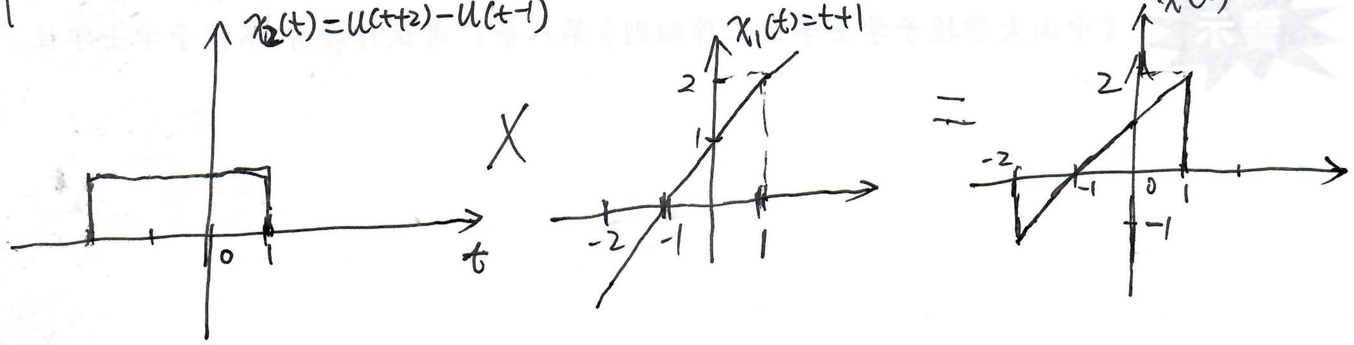
中山大学本科生考试草稿纸

四4.

画出 $x(t)=(t+1)[u(t+2)-u(t-1)]$，并给出 $x'(t)$，$x^{(-1)}(t)$

解 ① 门信号乘 $x_1(t)=t+1$，

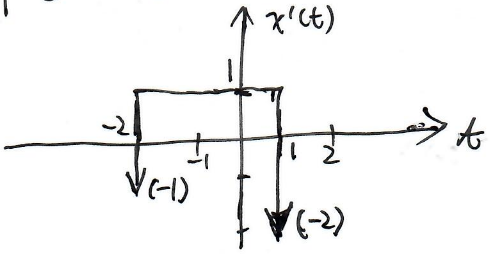
$x_2(t)=u(t+2)-u(t-1)$



② 两种方法

$$x'(t)=(t+1)[\delta(t+2)-\delta(t-1)]+[u(t+2)-u(t-1)]$$

$$=-1\times\delta(t+2)-2\delta(t-1)+[u(t+2)-u(t-1)]$$



③ $$x^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}(\tau+1)[u(\tau+2)-u(\tau-1)]d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{t}(\tau+1)u(\tau+2)d\tau-\int_{-\infty}^{t}(\tau+1)u(\tau-1)d\tau$$

$$=\left[\int_{-2}^{t}(\tau+1)d\tau\right]u(t+2)-\left[\int_{1}^{t}(\tau+1)d\tau\right]u(t-1)$$

$$=\left[\frac{t^2}{2}+t-\left(\frac{(-2)^2}{2}-2\right)\right]u(t+2)-\left[\frac{t^2}{2}+t-\left(\frac{1}{2}+1\right)\right]u(t-1)$$

$$=\left(\frac{t^2}{2}+t\right)u(t+2)-\left(\frac{t^2}{2}+t\right)u(t-1)+\frac{3}{2}u(t-1)$$

$$=\left(\frac{t^2}{2}+t\right)[u(t+2)-u(t-1)]+\frac{3}{2}u(t-1)$$