

说明：本文件是本人于2019年考研期间阅读奥本海姆著作《信号与系统》的笔记。本人19考研中山大学通信专业，专业课信号与系统134分，最终初试排名第三，复试排名第一，综合第二（与第一仅差0.34分，1000分总）

笔记比较全面，如有错误请自我甄别，表达都是按照个人习惯，不太规范还请见谅。当然，笔记存在疏漏，考试的时候就有题型没有覆盖到，切勿当作重点复习，切勿当成考纲复习，仅供参考仅供参考。

欢迎到哔哩哔哩关注：小江通信学不会，UID：73526515

帕斯瓦尔定理:

$$\text{时域: } E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt, \quad P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

$$\text{信号有限: } E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2, \quad P_{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$$

$$F_s: \frac{1}{T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

(周期信号平均功率) = 各次谐波平均功率之和

$$F_t: \frac{1}{N} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 = \sum_{k=-N}^N |a_k|^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

$$\text{DTFT: } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

SS - oppenheim.

Chapter 1 - 信号与系统.

1. 功率信号, 能量信号.

横轴

$$\text{信号能量: } E_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad (\text{离散})$$

$$E_{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 \quad (\text{离散})$$

$$\text{平均功率: } P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

$$P_{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$$

功率信号: $E_{\infty} = \infty, P_{\infty} = C$ 周期信号平均功率 P_{∞}

能量信号: $E_{\infty} = C, P_{\infty} = 0$ 等于一个周期内的功率

第三类: $E_{\infty} = \infty, P_{\infty} = \infty$

注: 周期信号都为功率信号 (每个周期内能量有限, 功率有限)

2. 信号的变换.

2.1 时移: $x(t) \rightarrow x(t+t_0)$ 左移 ($t_0 > 0$)
 $x(t) \rightarrow x(t-t_0)$ 右移.

2.2 反转: $x(t) \rightarrow x(-t)$ $x(t+t_0) \rightarrow x(-t-t_0)$
(仅改变 t 的符号)

2.3 尺度变换: $x(t+t_0) \rightarrow x(at+t_0)$ $a > 1$: 压缩 (x 轴为
 $x[n+n_0] \rightarrow x[an+n_0]$ 基准 (轴))

尺度变换只改变自变量 t 的系数大小.

(1)

对于序列的尺度变换：当 $\begin{cases} a > 1 \\ a < 1 \text{ 且 } a \neq 0 \text{ (} m \text{ 取整数)} \end{cases}$

时会有信息丢失。

2.4 变换实例

① $f(t) \rightarrow f(\frac{1}{2}t-2)$

$f(t)$ 延 $\rightarrow f(\frac{1}{2}t)$ 延 $\rightarrow f(\frac{1}{2}(t-4)) = f(\frac{1}{2}t-2)$

注意绘图 \rightarrow 时移长度以 t 为基准。

$f(t)$ 延 $\rightarrow f(t-2)$ 以 t 轴延 $\rightarrow f(\frac{1}{2}t-2)$

3. 奇偶信号

3.1 偶信号： $x(-t) = x(t)$
 $x[-n] = x[n]$

$$\begin{cases} f(t) = f_{\text{偶}}(t) + j f_{\text{奇}}(t) \\ |f_{\text{偶}}|^2 = f(t) \cdot f^*(t) = f_{\text{偶}}(t) f_{\text{偶}}(t) \\ |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

3.2 奇信号： $x(-t) = -x(t)$
 $x[-n] = -x[n]$

奇信号：波形沿时间轴翻转
和半个周期并相对于时间轴反转
波形不变。即 $f(t) = -f(t+\frac{T}{2})$ 。

3.3 奇偶分解： $x_e(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)]$ (前视为周期信号)

$x_o(t) = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)]$

\Rightarrow 差分运算

① 前向一阶差分： $\Delta x[n] = x[n+1] - x[n]$

前向二阶差分： $\Delta^2 x[n] = \Delta [\Delta x[n]] = \Delta [x[n+1] - x[n]]$
 $= \Delta [x[n+1]] - \Delta x[n] = \Delta x[n+1] - 2x[n] + x[n-1]$

② 后向一阶差分： $\nabla x[n] = x[n] - x[n-1]$

= 阶后向差分： $\nabla^2 x[n] = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]$

4. 连续时间复指数信号

一般形式： $x(t) = c e^{at}$

4.1 实指数信号： c, a 均为实数。

4.2 周期复指数和正弦信号： a 为纯虚数。

$\Rightarrow x(t) = e^{j\omega t}$

$x(t+T) = e^{j\omega(t+T)} = e^{j\omega t} \cdot e^{j\omega T}$

当 $e^{j\omega T} = 1$ 即当 $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$ 时 $x(t)$ 为周期信号， T 为基波周期。

欧拉公式： $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$
 $\cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$
 $\sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$ $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$

$e^{j2\pi} = \cos 2\pi = 1$ $e^{j\pi} = -1$ $|e^{j\omega t}| = 1$

4.3 \Rightarrow 正弦信号： $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

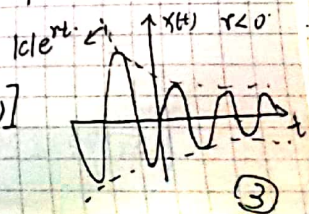
能量 $E_p = \int_0^{T_0} |e^{j\omega t}|^2 dt = \int_0^{T_0} 1 dt = T_0$

功率 $P = \frac{1}{T_0} \cdot T_0 = 1$

注：常信号基波周期无定义，因其找不到最小正周期下，但其可视为周期信号，也可定义其基波频率为 0。

4.3 一般复指数信号： $x(t) = c e^{at}$ ， $c = |c| e^{j\theta}$ ， $a = \gamma + j\omega$

$x(t) = |c| e^{\gamma t} \cdot e^{j(\omega t + \theta)}$
 $= |c| e^{\gamma t} [\cos(\omega t + \theta) + j \sin(\omega t + \theta)]$



5. 离散时间复指数信号

一般形式: $x[n] = C\alpha^n \xrightarrow{\alpha=e^{\beta}} = Ce^{\beta n}$

5.1 实序列: C, α 均为实数

5.2 正弦序列: β 为纯虚数 $\Rightarrow x[n] = e^{j\omega_0 n}$ ↻ 欧拉关联

$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \varphi)$

5.3 一般复指数序列: $C = |C|e^{j\theta}$, $\alpha = |\alpha|e^{j\omega_0}$

$x[n] = |C| \cdot |\alpha|^n \cdot e^{j\omega_0 n + \theta}$

5.4 关于 $e^{j\omega_0 n}$ 的性质。

① 频率范围 $0 \sim \pi$

$e^{j(\omega_0 + 2\pi)n} = e^{j\omega_0 n} \cdot e^{j2\pi n} = e^{j\omega_0 n}$

— 即 ω_0 与 $\omega_0 \pm 2\pi$ 对应于同一个信号

而 $e^{j\omega_0 n}$ 的 ω_0 不同对应信号就不同

因此: 在 2π 附近为低频信息, $(2k+1)\pi$ 附近为高频信息, 且 $e^{j\pi n} = (-1)^n$

② $e^{j\omega_0 n} / A \cos(\omega_0 n + \varphi)$ 的周期判定

$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n} \Rightarrow e^{j\omega_0 N} = 1 \Rightarrow \omega_0 N = 2\pi m$

即: 当 $\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{N}{m}$ $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N} = \frac{2\pi}{N/m}$ $\frac{\omega_0 \cdot N}{m} = 2\pi$

$\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为无理数: 非周期, $\therefore \frac{N}{m}$ 一定为有理数
 $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 为有理数: 周期 $\begin{cases} T = N/m, m \text{ 为整数} \\ T = N, N/m \text{ 不为整数} \end{cases}$
 (注: \mathbb{Q} 中不含 π)
 即整数 N, m 无法凑出 π , \therefore 一定非周期

注: 判定时将频率写成 $\frac{2\pi k}{N}$ 形式, 分子为 π 偶数倍, 且 k 与 N 互质, 则 N 即为周期 (若不能写成这种形式, 即 $2m$ 的倍数, 用定义法)

(例): $x[n] = e^{j(2\pi/3)n} + e^{j(3\pi/4)n}$

\downarrow $T_1 = 3$ \downarrow $\frac{3\pi}{4} = \frac{6\pi}{8} \Rightarrow T_2 = 8$

$T = 3 \times 8 = 24$. (注: 和信号周期为子信号周期的最小公倍数)

③ 对于 $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, 他的一组谐波只有 N 个不同分量

$x_{k+N}[n] = e^{j(k+N)(2\pi/N)n} = e^{jk(2\pi/N)n} \cdot e^{j2\pi n} = x_k[n]$

$\therefore 0 \leq k < N-1$ 次: $x_0[n] = 0, \dots, x_{N-1}[n] = e^{j(2\pi/N)(N-1)n}$

6. 单位冲激函数, 所谓

6.1 $\delta(t) = \begin{cases} \infty & t=0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$

性质: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot f(t) dt = f(0)$

② $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ (强度为1的冲激)
 ③ $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t) dt = f(0)$ (面积)

④ 偶对称: $\delta(t) = \delta(-t)$

⑤ 尺度变换: $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$

6.2 $\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$ (单位阶跃)

性质: $\frac{d}{dt} \epsilon(t) = \delta(t)$

$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \epsilon(t)$

令 $\tau = t - \delta$ 则有: $\int_{-\infty}^0 \delta(t-\delta) \cdot (-d\delta) = \int_0^{\infty} \delta(t-\delta) d\delta$

注: 冲激信号能量有限, 面积为1.
 其中 $f(t) = 0$ 且 $f(t) \neq 0$, $f(t)$ 窄带

6.1 $\delta[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$

6.2 $\epsilon[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$
 性质: $\epsilon[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m]$
 $\epsilon[n] = \sum_{k=0}^n \delta[n-k]$

$\delta[n] = \epsilon[n] - \epsilon[n-1]$
 $\delta[n] \cdot x[n] = x[n] \cdot \delta[n]$

注: $\delta(kt) = \delta(t)$
 $\delta(kt) = \delta(t) \delta(t)$
 $\delta(kt) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$

bilibili: @一只通信狗

① 其他常用信号

奇信号: $f(t)/f(-t) / \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ 存在不连续点.

7.1 矩形波

$$G(t) = \mathcal{E}(t + \frac{T}{2}) - \mathcal{E}(t - \frac{T}{2}) \quad \text{[双边]}$$

7.2 斜坡信号

$$R(t) = \begin{cases} at & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$R_1(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

性质: $\frac{dR(t)}{dt} = \mathcal{E}(t)$

$$\int_0^t \mathcal{E}(\tau) d\tau = R_1(t)$$

7.3 符号函数

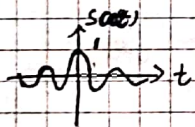
$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

$t=0$ 无定义, 或取 0 值.

性质: $\begin{cases} \mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t) \\ \text{sgn}(t) = 2\mathcal{E}(t) - 1 \end{cases}$

7.4 抽样函数

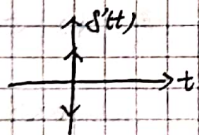
$$\text{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t}$$



性质: $\int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}(t) dt = \pi$

$$\int_0^{\infty} \text{Sa}(t) dt = \frac{\pi}{2}$$

7.5 冲激偶: $\delta'(t)$



(把 $\delta(t)$ 视为常函数求导)

性质: $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta'(t) dt = -f'(0)$ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) dt = 0$

$$\int_{-\infty}^t \delta'(\tau) d\tau = \delta(t) \quad \text{分部积分}$$

$$\delta'(-t) = -\delta'(t) \Rightarrow [\delta(-t)]' = \delta'(t) = -\delta'(-t)$$

$$f(t) \delta'(t) = f(0) \delta'(t) - f'(0) \delta(t)$$

⑧ 系统及其性质

8.1 记忆性

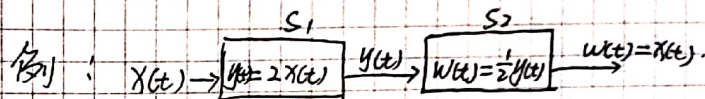
无记忆系统: 系统的输出仅取决于该时刻输入.

无记忆系统一定为因果系统

8.2 可逆性

可逆: 不同输入产生不同输出, 则称系统可逆

逆系统: 将原系统输出做为输入时, 逆系统输出为原系统输入



则 S_2 为 S_1 逆系统

$$Y(t) = \frac{d}{dt} e^{at} \rightarrow \text{不可逆}$$

$$Y(t) = \int_0^t e^{at} dt \rightarrow \text{可逆, 逆系统: } Y(t) = \frac{d}{dt} Y(t)$$

8.3 因果性

因果系统: 一个系统任何时刻的输出只取决于现在的

输入及过去的输入. 注: 因果信号: $x(t) = 0, t < 0$ 时

判定: ① $y[n] = x[n-n]$

$y[-4] = x[4]$ 当前 $(n=-4)$ 输出取决于将来输入, 非因果.

② $y(t) = x(t) \cos(t+1)$

任何时刻输出只取决于当前输入, 再乘以一个时间函数.

\therefore 因果系统 (时变)

注: 验证因果性要把输入信号与其他系统定义中用到的其他函数分开. // 注: 若 $h(t) = 0, t < 0$ 时 \Rightarrow 系统因果.

8.4 稳定性

稳定性: 1. 输入有界则系统输出有界; 2. 对于LTI系统, 其单位冲激响应绝对可积则系统稳定.

判定: ① $S_1: y(t) = t \cdot x(t)$

当 $x(t) = 1$ 则 $y(t) = t$, 无界
($t \in \mathbb{R}$)

因为: 设 $M > 0$, 当 $t > M$ 时都有 $|y(t)| = |t| > M$

判定不稳定: 找特殊输入使输出无界.

② $S_2: y(t) = e^{xt}$

设 $|x(t)| \leq M$, 则 $y(t) = e^{xt} \leq e^M$, 有界

\therefore 稳定

判定稳定: 一般性有界输入得到一般性有界输出.

8.5 时不变性

时不变: 系统特性不随时间改变.

判定方法: $T[x(t-t_0)] = y(t-t_0)$
自变量 自变量

(系统自变量为 $x(t)$, 输入, 输出, $x(t), y(t)$ 自变量为 t .)

注意时移方法.

例: ① $y(t) = x(2t)$ (尺度变换, 只改变系数)

$$x_1(t) = x(t) \xrightarrow{T} T[x(t)] = x(2t) = y_1(t)$$

$$x_2(t) = x(t-t_0) \xrightarrow{T} T[x(t-t_0)] = x(2t-2t_0) = y_2(t)$$

$$y_1(t-t_0) = x(2(t-t_0)) = x(2t-2t_0) \neq y_2(t)$$

\therefore 时变. (注: 函数上的函数变量代换, 这里不一样)

② $y[n] = n \cdot x[n]$

$$\text{法1: } x_1 = x[n] \xrightarrow{T} n \cdot x[n] = y_1(n)$$

$$x_2 = x[n-1] \xrightarrow{T} n \cdot x[n-1] = y_2(n)$$

$$y_1[n-1] = (n-1) \cdot x[n-1] \neq y_2(n)$$

* 理解: 若输入产生时延, 输出与原输出相比也产生时延...

现在 $t=n$ 时刻, 给出延后输入, 系统仍以当前时刻 n 作为加权系数给 $x[n-1]$ 作为输入, 不满足要求.

法2: 令 $x_1[n] = \delta[n]$ 则 $y_1[n] = 0$

$$x_2[n] = \delta[n-1] \text{ 则 } y_2[n] = n \cdot \delta[n-1] = \delta[n-1]$$

$$\text{显然 } y_1[n-1] \neq y_2[n]$$

时域尺度变化.

注: 若系统除 $x(t)$ 外还有其他关于 t 的表达式, 则为时变系统可能性大, 若不存在当然也可能为时变.

8.6 线性 (可加性, 比例性)

$$ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$$

* a, b 可以为任何复常数.

注: 当 $a=0$ 时, 由定义可知 (比例性): $0 \cdot x_1(t) \rightarrow 0 \cdot y_1(t) = 0$

因此对于线性系统 0 输入, 必定 0 输出, 非 0 输入的

$\therefore y(t) = x(t) + 3$ 此类必非线性.

($x(t)$ 在 (t_1, t_2) 值为 0, 其输出此期间内不一定为 0)

判定: ① $y(t) = t \cdot x(t)$

$$\begin{aligned} T[ax_1(t) + bx_2(t)] &= t[ax_1(t) + bx_2(t)] \\ &= atx_1(t) + btx_2(t) \\ &= ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

\therefore 线性

② $y[n] = \text{Re}\{x[n]\}$

设 $x[n] = r[n] + j s[n]$

$\therefore y[n] = r[n]$

$j x[n] = -s[n] + j r[n]$

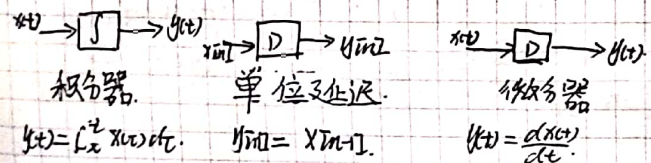
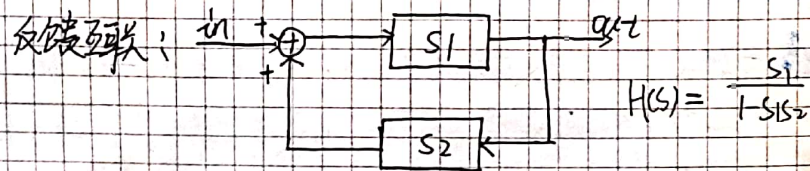
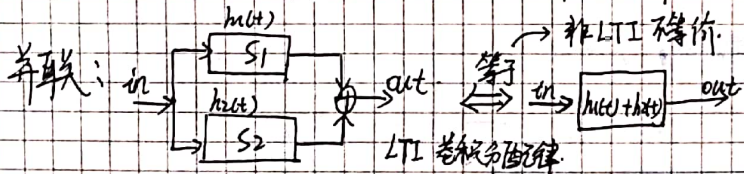
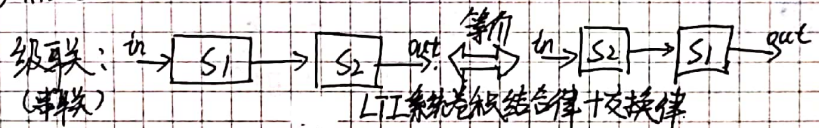
$\therefore y[n] = -s[n] \neq j y[n]$ 非线性

增量线性系统: 响应对于输入的变化是线性的

如: $y(t) = a x(t) + c$ 一般模型: $y(t) = T[x(t)] + c(t)$
 线性系统

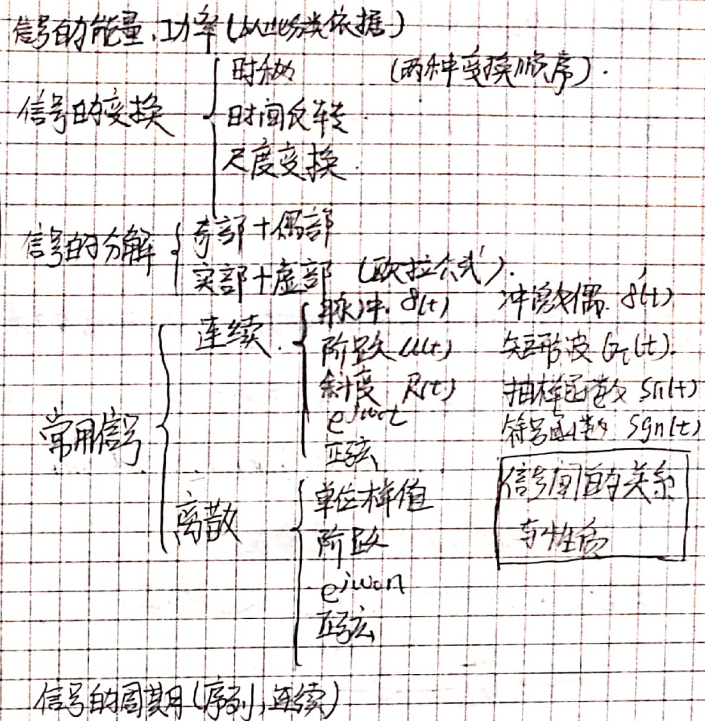
判定: 两个响应之差为对应输入之差的线性函数 (此线性函数可加, 可乘)

⑨ 系统的组合

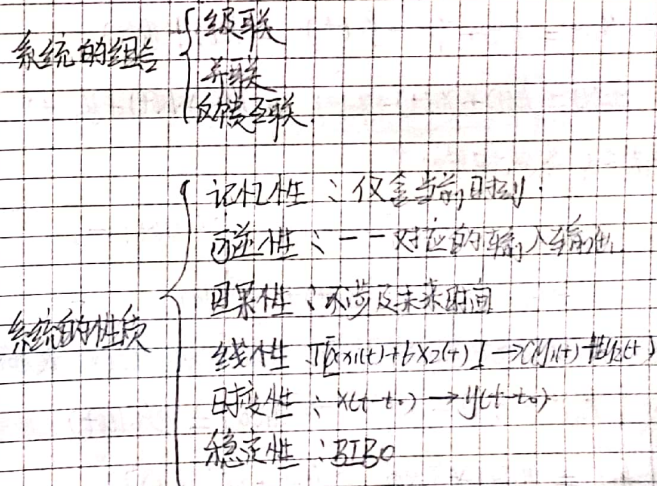


知识框架

信号



系统



注：自相关，互相关函数

互相关：
$$Y_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau) y(\tau) d\tau = Y_{yx}(-t)$$

自相关：
$$Y_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau) x(\tau) d\tau$$

[17年六] 某时不变增量线性系统，在以下各情况下初始状态相同。

已知当输入信号 $x_1(t) = \delta(t)$ 时，全响应为 $y_1(t) = \delta(t) + e^{-t}u(t)$ ；当

输入信号 $x_2(t) = u(t)$ 时，全响应为 $y_2(t) = 3e^{-t}u(t)$ 。

(1) 若 $x_3(t) = e^{-2t}u(t)$ ，求全响应。

(2) 若 $x_4(t) = t[u(t) - u(t-1)]$ ，求全响应。



(1) $y_1(t) = h(t) * x_1(t) + y_0(t) = h(t) + y_0(t)$

$y_2(t) = h(t) * x_2(t) + y_0(t) = h(t) * u(t) + y_0(t)$

两式求导，消去相减：

$$h'(t) - h(t) = \delta'(t) + \delta(t) - e^{-t}u(t) - [3e^{-t}u(t) + 3\delta(t)]$$

$$h'(t) - h(t) = \delta'(t) - 2\delta(t) + 2e^{-t}u(t) \quad *$$

将*式右列视为输入，左列视为输出，则可求全响应

(1) $h'(t) - h(t) = \delta(t) \Rightarrow h_1(t) = e^t u(t)$

则
$$h(t) = h_1(t) * [\delta(t) - 2\delta(t) + 2e^{-t}u(t)]$$

$$= [\delta(t) + e^t u(t) - 2e^t u(t) + [e^t u(t) - e^{-t}u(t)]]$$

$$= \delta(t) - e^{-t}u(t) \quad [注：解*式也可使用观察法]$$

$$\therefore y_0(t) = 2e^{-t}u(t)$$

(2)
$$y_3(t) = e^{-2t}u(t) * [\delta(t) - e^{-t}u(t)] + 2e^{-t}u(t)$$

$$= 2e^{-2t}u(t) + e^{-t}u(t)$$

→ S域计算

(2)
$$y_4(t) = x_4(t) * h(t) + y_0(t)$$

$$= (4e^{-t})u(t) - u(t-1)$$

卷积 (逐点法计算)

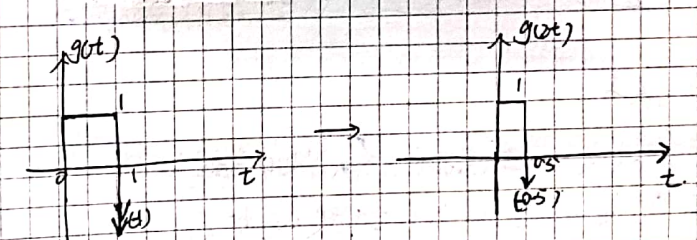
注：
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t^2 - 4) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|^{-1} \delta(t-t_0) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} \delta(t-2) + \frac{1}{4} \delta(t+2) dt$$

$$= \frac{1}{2}$$

信号 $\left\{ \begin{array}{l} \text{连续} \left\{ \begin{array}{l} \text{模拟: 幅度, 时间连续} \\ \text{量化信号: 幅度离散, 时间连续} \end{array} \right. \\ \text{离散} \left\{ \begin{array}{l} \text{抽样: 时间离散, 幅度连续} \\ \text{数字: 时间, 幅度的离散} \end{array} \right. \end{array} \right.$



注意冲激的尺变

$$x[n] = \cos\left(\frac{3}{8}n^2\right) \rightarrow N=8$$

$$\cos\left(\frac{3}{8}(n+N)^2\right) = \cos\left(\frac{3}{8}n^2 + \frac{3}{4}nN + \frac{3}{8}N^2\right)$$

要有：
$$\frac{3}{4}nN + \frac{3}{8}N^2 = 2k\pi$$

即
$$2nN + N^2 = 16k \Rightarrow N=8$$

 对所有n成立

Chapter 2 线性时不变系统

一、卷积和

① 序列的表示: 单位脉冲序列的移位加权求和。

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n-k]$$

② 对于线性时不变系统来说: 和信号的响应等于分解信号响应之和, 因此任意信号的响应可以用最基本的单位样值序列的响应的移位加权求和表示。

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \cdot h[n-k]$$

其中: $h[n-k]$ 为序列基本分量 $\delta[n-k]$ 产生的响应, $x[k]$ 为此刻下该响应的权值, 也即序列取值。

二、卷积积分

① 用冲激表示连续时间信号 (脉冲分解)。

用窄矩形近似 $x(t)$ 的极限状态。

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \quad (\text{即单位脉冲的性质})$$

② 与离散情况下类似, 将单位序列换成单位脉冲作为信号基本单元, 因此对于 LTI 系统有:

$$卷积积分: y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

三、卷积的计算与性质 (LTI 系统性质)

图解: 卷积和与卷积积分步骤类似 一般为: 换元, 反折, 平移, 相乘, 求和 (积分)。

重点在于 **平移量 $\tau(n)$** 的不同会引起卷积表达式的不同, 因此要利用 $\tau(n)$ 的范围来分段计算。因此确定图形中哪一点能代表平移量 τ 呢? **$\tau=0$ 点**, 因为反折后 $f(\tau)$ 与 $g(\tau)$ 在 $\tau=0$ 处无变化, 且平移前 $\tau=0$ (反折), 为 τ 轴刻度的度量刻度与 τ 轴刻度一致得选 $\tau=0$ 做为 τ_0 , 则 $t_{\text{折}} = t_{\text{折}} - 0$

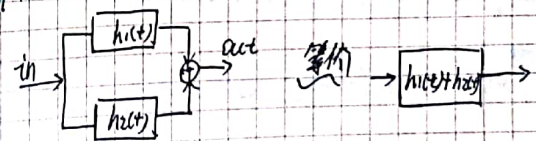
性质 (信号通过系统为卷积因此卷积的性质反映到系统上也就是 LTI 系统的性质)。

① 交换律: $x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$
 $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$

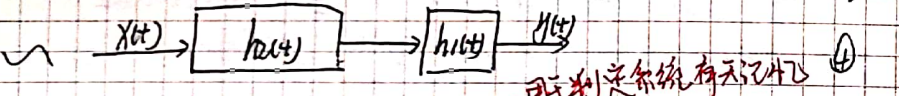
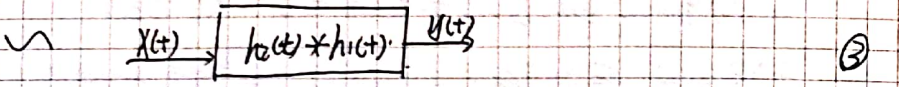
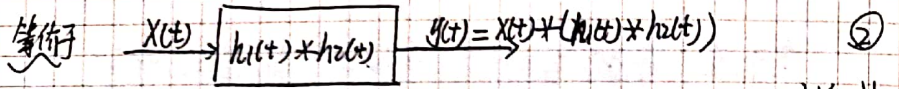
理解: 以 $h(t)$ 为输入, $x(t)$ 为系统单位脉冲响应的输出 等于以 $x(t)$ 为输入 $h(t)$ 为脉冲响应的输出。

② 分配律: $x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$

理解: 可以将信号 (或响应) 拆分为几个简单信号卷积。



② 结合律: $x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t)$. (无顺序性)



④ (有)无记忆 LTI 系统: $h(t) = k\delta(t)$ / $h[n] = k\delta[n]$
 用于判定系统有无记忆
 输出只与当前时刻有关输入, 输入 $\delta(t)$ 得到 $h(t) = k\delta(t)$.
 \downarrow
 $\therefore y(t) = kx(t)$ 即 $x(t) * k\delta(t) = kx(t)$.

有: $x(t) * \delta(t) = x(t)$ \Rightarrow $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$
 $x[n] * \delta[n] = x[n]$ \Rightarrow $x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0]$

⑤ 可逆 LTI 系统:
 由可逆系统定义: $x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = x(t)$
 $\Rightarrow h_1(t) * h_2(t) = \delta(t)$ (可逆系统判据条件)

⑤ 因果 LTI 系统
 $h_1(\omega) \cdot h_2(\omega) = \delta(\omega)$

$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \cdot h[n-k]$ [注: $k > n$ (当前时刻) 分量取 0]

$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$

⑥ 稳定 LTI 系统

稳定判定依据: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$ (绝对可积)
 注: 对于 LTI 系统其 ROC 包括 $j\omega$ 轴则系统稳定
 $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$

⑦ LTI 系统的单位阶跃响应

$S[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k]$
 $= \sum_{k=-\infty}^n h[k]$ (累加 $h[n]$ 从 -1 到 n)

$h[n] = S[n] - S[n-1]$ (累加器 \leftrightarrow 差分器)

$S(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$ (单位冲激响应的积分)
 $h(t) = \frac{dS(t)}{dt}$

四. 微分方程的时域解法

这章暂不为重点考虑, 对比用频域, s 域 (Z 域) 解更方便.

$C_n \frac{d^n r(t)}{dt^n} + \dots + C_1 \frac{dr(t)}{dt} + C_0 r(t) = x(t)$

① 求齐次解: 1. 特征方程: $C_n \lambda^n + \dots + C_1 \lambda + C_0 = 0$

2. 求出特征根: $\begin{cases} \text{单根: } r(t) = A e^{\lambda t} \\ \text{k重根: } r(t) = \sum_{i=1}^k A_i t^{k-i} e^{\lambda t} \end{cases}$

齐次解: $r(t) =$ 单根对应解 + 重根对应解

② 求特解: 特解形式与激励形式有关: 一般如下

$\begin{matrix} E \\ t^q \end{matrix} \Rightarrow r(t) = \begin{matrix} c \\ c_1 t^q + c_2 t^{q+1} + \dots + c_n t^{q+n} \end{matrix}$

$e^{\alpha t}$: α 不为特征根 $\Rightarrow r(t) = B e^{\alpha t}$
 α 为特征单根 $\Rightarrow B_0 t e^{\alpha t} + B_1 e^{\alpha t}$
 α 为 k 重根 $\Rightarrow B_0 t^k e^{\alpha t} + \dots + B_k e^{\alpha t}$

$\cos \beta t \Rightarrow B_1 \cos \beta t + B_2 \sin \beta t$
 $\sin \beta t \Rightarrow$

设出特解形式将 $r(t), x(t)$ 化为方程, 求出 $r(t)$ 系数

③ $r(t) = r_1(t) + r_2(t)$

则对 $r_1(t)$ 中存在待定系数, 要代入初始条件: $r(0^+), r'(0^+)$ 等。

注: $h(t), s(t)$ 时域解法不讨论, 详见上交教材
 初始状态跳变等也不讨论。
 差分方程, 过程类似, 形式不同, 不作讨论

五、微分、差分方程的框图描绘。(见八、九章)

注: 卷积尺度性质

$y(t) = h(t) * x(t)$

又: $y(at) = ah(at) * x(at), a > 0$

$y(t) = h(t) * x(t)$

$\mathcal{F}\{y(t)\} = H(j\omega) \cdot X(j\omega)$
 $y(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} Y(j\frac{\omega}{a}) = \frac{1}{|a|} H(j\frac{\omega}{a}) \cdot X(j\frac{\omega}{a})$
 $\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} a \cdot H(at) * X(at)$

注: 卷积积分的性质:

微分性质: $\frac{d}{dt} [x(t) * h(t)] = x(t) * \frac{d}{dt} h(t) = \frac{d}{dt} x(t) * h(t)$

理解: 微分运算可视为一个系统, 式①、②、③分别表示,

微分运算系统在整个系统位置的不同, 但是根据系统级联等效系统与顺序无关则三式相等。

积分: $\int_{-\infty}^t [x(\tau) * h(\tau)] d\tau = x(t) * \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$

$= \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau * h(t)$

bilibili \rightarrow 又通信狗

时延: $x(t-t_1) * h(t-t_2) = y(t-t_2-t_1)$

证: 左边 $= [x(t) * \delta(t-t_1)] * [h(t) * \delta(t-t_2)]$
 $= [x(t) * h(t)] * \delta(t-t_1-t_2)$
 $= y(t-t_1-t_2)$

由此可以知道 $x(t) \xrightarrow{s} y(t)$, 则 $x(t) \xrightarrow{s} y(t), \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xrightarrow{s} \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau$

分段函数

$\int x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ 变限积分
 $x(t) * [u(t) - u(t-T)] = \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau$
 $= \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{t-T} x(\tau) d\tau$

习题:

[SS, 2.19] 考虑如图所示的两个系统 S_1 和 S_2 级联:

S_1 : 因果线性时不变系统, $w[n] = \frac{1}{2}w[n-1] + x[n]$

S_2 : 因果线性时不变系统, $y[n] = \alpha y[n-1] + \beta w[n]$

$x[n]$ 与 $y[n]$ 的关系由下面差分方程给出:

$$y[n] = -\frac{1}{8}y[n-2] + \frac{3}{4}y[n-1] + x[n]$$

(a) 求 α, β



(b) 求 S_1, S_2 级联后的单位取样响应。

解: 迭代法

(a) 由 S_2 : $y[n] = \alpha y[n-1] + \beta w[n]$

$$w[n] = \frac{1}{\beta} y[n] - \frac{\alpha}{\beta} y[n-1]$$

$$w[n-1] = \frac{1}{\beta} y[n-1] - \frac{\alpha}{\beta} y[n-2]$$

代入 S_1 : $\frac{1}{\beta} y[n] - \frac{\alpha}{\beta} y[n-1] = \frac{1}{2\beta} y[n-1] - \frac{\alpha}{2\beta} y[n-2] + x[n]$

$$y[n] = (\alpha + \frac{1}{2}) y[n-1] + \frac{\alpha}{2} y[n-2] + x[n]$$

(目标: 消除中间量 $w[n]$, 得到 $x[n] \sim y[n]$ 再对比系数)

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + \alpha = \frac{3}{4} \\ -\frac{\alpha}{2\beta} = -\frac{1}{8} \\ \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{4} \\ \beta = 1 \end{cases}$$

(b) S_1 : $h_1[0] = 0 + x[0] = 1$ ($n < 0, h_1[0] = 0$ 因果)

以 S_1 为输入, 迭代 $h_1[n] = \frac{1}{2} h_1[n-1] + x[n]$ $\dots h_1[n] = (\frac{1}{2})^n \cdot w[n]$

S_2 : $h_2[0] = 1, h_2[1] = \frac{1}{4} + 0, h_2[2] = \frac{1}{4}$ (令 $w[n] = \delta[n]$)

$$\dots h_2[n] = (\frac{1}{4})^n w[n]$$

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] = [2(\frac{1}{2})^n - (\frac{1}{4})^n] w[n]$$

注: 频域法更简单

Chapter 3. 周期信号的傅里叶级数表示.

一. 特征输入

1. 特征函数: 若系统对某一信号的响应仅是一个常数乘以输入, 则该信号为系统的特征函数. 而幅度因子称为系统特征值.

2. 复指数 e^{st} (z^n) 为线性时不变系统的特征函数.

证: ① 令 $x(t) = e^{st}$, $s = a + jb$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

若 * 式收敛则其为常数且与 s 有关, 设为 $H(s)$.
 $H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$
 此处 s 为边指, 若 $x(t) = e^{zt}$, $y(t) = e^{zt} \cdot H(s) |_{s=z}$

② 对于序列 (离散复数指: z^n)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k] = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z^{-k}$$

若 * 式收敛则为与 z 有关的常数 令为 $H(z)$

$$y[n] = z^n \cdot H(z)$$

$$\text{例: } x[n] = z^n \text{ 则 } y[n] = z^n \cdot H(z) |_{z=z}$$

注: 由这一性质可以将输入信号转换为复指数和形式,

只需求出系数 $H(s)/H(z)$ 即可得到经过 LTI 系统的响应.

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot H(jk\omega_0) \cdot e^{jk\omega_0 t} \quad / \quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(e^{j2\pi k/N}) e^{j2\pi kn/N}$$

二. 连续周期信号的傅里叶级数.

① 对于满足狄利克雷条件的周期信号可以表示为以 ω_0 为基波的正谐波关系的复指数 (三角) 信号集.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (\text{被积函数} \rightarrow \text{周期为 } T)$$

注: 各次谐波均含正负两根谱线

其中 $a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt$ 为直流分量

注: 对于时限信号 (有限时间不为 0) 其直流分量均为 0. ($T \rightarrow \infty$)

② 狄利克雷收敛条件

① 绝对可积: $\int_T |x(t)| dt < \infty$

② 单个周期内 $x(t)$ 最大值, 最小值数目有限

③ 有限区间内, 存在有限个间断点, 且不为无穷间断点.

③ 吉布斯现象.

以有限项傅里叶级数近似不连续的信号, 在其间断点处会出现高频起伏和超量, 当项数增加时这些起伏被挤在更靠近间断点, 使得这些起伏的能量不被忽略. 但起伏的峰值不变.

注: 负频率? 无物理意义 对于连续信号 各频都属于对应次谐波频率. 若 $f(t)$ 为实信号 它用复指数表示 且必需存在共轭对 $e^{j\omega n}$, $e^{-j\omega n}$ 以消去虚部.

二、连续傅里叶级数的性质

1. 线性: $Ax(t) + By(t) \xrightarrow{FS} A \cdot a_k + B \cdot b_k$
2. 时移: $x(t-t_0) \xrightarrow{FS} e^{jk\omega_0 t_0} \cdot a_k$
3. 翻转: $x(-t) \xrightarrow{FS} a_{-k}$
4. 频移: $e^{jM\omega_0 t} x(t) \xrightarrow{FS} a_{k-M}$
5. 共轭: $x^*(t) \xrightarrow{FS} a_{-k}^*$
6. 尺度变换 (ω 变化): $x(\alpha t) \xrightarrow{FS} a_k$
7. 相乘: $x(t) \cdot y(t) \xrightarrow{FS} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \cdot b_{k-l}$
8. 微分: $\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{FS} jk\omega_0 a_k$ (不考虑直流量)
9. 周期卷积: $\int x(t) y(t-\tau) d\tau \xrightarrow{FS} T a_k \cdot b_k$

② 对称性

实信号: $a_k = a_{-k}^*$ 共轭对称 (以 $k=0$ 为对称轴)

实偶信号: a_k 为关于 k 的偶函数

实奇信号: a_k 为关于 k 的纯虚奇函数

③ 帕斯瓦尔定理:

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

理解: 信号一个周期内平均功率等于其各次谐波功率之和, 且各次谐波平均功率为其傅里叶系数的模平方

- ④ 收敛性: $n \uparrow, |a_k| \downarrow$
- 唯一性: $x(t)$ 谱线唯一
- 谐波性: 仅在 $n\omega_0$ 处有谱线分量

四、离散周期信号的傅里叶级数及其性质

1. 离散周期复指数信号 $e^{jk\omega_0 n}$ 其谐波集中只有 N 个不同的信号, 因此用复指数 $e^{jk\omega_0 n}$ 的加权和来表征周期序列将是只有 N 项级数和。

注: 序列谱线具有周期性, 因而与连续信号谱线不同, 因此 $\pm k\omega_0$ 不属于同次谐波分量。

2. 离散时间傅里叶级数:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=-N}^{N-1} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N}^{N-1} x[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-N}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

(每 2π 长度范围内, 谱线一致): $N \cdot \omega_0 = 2\pi$ $[a_{k+N} = a_k, \text{周期谱}]$

$$\sum_{n=-N}^{N-1} e^{jk(2\pi/N)n} = \begin{cases} N, & k=0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

3. 周期复指数信号在一个周期内求和为 0, 除非其为一常数。

4. 性质:

相乘: $x[n] \cdot y[n] \xrightarrow{FS} \sum_{l=-N}^{N-1} a_l \cdot b_{k-l}$ (周期卷积)

差分: $x[n] - x[n-1] \xrightarrow{FS} (1 - e^{-jk(2\pi/N)}) a_k$

与连续情况类似:

线性: $Ax[n] + By[n] \xrightarrow{FS} A a_k + B b_k$

时移: $x[n-n_0] \xrightarrow{FS} a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0}$

频移: $e^{jM(2\pi/N)n} x[n] \xrightarrow{FS} a_{k-M}$

共轭: $x^*[n] \xrightarrow{FS} a_{-k}^*$

翻转: $x[-n] \xrightarrow{FS} a_{-k}$

尺度: $x_m[n] = \begin{cases} x[n/m], & n=am \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \xrightarrow{FS} \frac{1}{m} a_k$ (周期为 mN)

周期卷积: $\sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-r]y[r] \xrightarrow{FS} N a_k b_k$

离散时间周期信号的帕斯瓦尔定理:

$$\frac{1}{N} \sum_{r=-\infty}^{\infty} |x[n-r]|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

注: 离散情况下谱线系数的对称性同连续时间。

5. 周期卷积

与非周期卷积不同, 周期卷积只在一个周期范围内求和
对应于图解法中, 反折后平移到 t/n 个单位, 但只有相继 T/N 个
单位长度内进行积分/求和, 对于周期信号之间的周期
卷积结果也为周期信号, 且周期不变。

同时把两个周期信号中的某一个取主周期其余部分
归0后, 二者的非周期卷积等于原来周期卷积。

也可, 取两周期信号主周期卷积再以 T 左右移位。

公式: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]$

$$\int_T x(t)y(t-T)dt$$

五、傅里叶级数与 LTI 系统

基于前面所述的特征输入, 设 $H(s), H(z)$ 为系统函数。

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st} dt \xrightarrow{s=j\omega} H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} \xrightarrow{z=e^{j\omega}} H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

已知 LTI 系统对于复指数信号响应仅加权一个常数

因此 输出为原信号 (傅里叶级数表示) 各分量加权系数和。

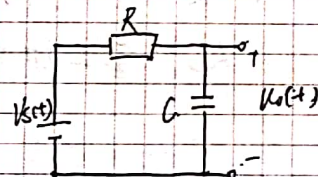
$$\begin{cases} y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \\ y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(e^{j2\pi k/N}) e^{j2\pi k n/N} \end{cases}$$

六、滤波器

1. 连续时间滤波器举例 —— 一阶 RC 低通滤波器。

1.1 低通: 以 V_C 为输出

理解: C 将高频分量通过, 即对高频信号呈导线作用不产生压降, 因此电容电压为低频分量的压降, 将其作为输出, 即输出低通。



建立微分方程:

$$R \cdot C \frac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t) = V_S(t)$$

令输入为 $V_S(t) = e^{j\omega t}$ (特征输入)

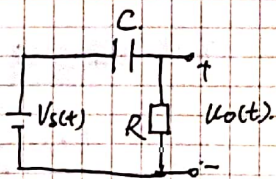
$$RC \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t} \cdot H(j\omega) + H(j\omega) \cdot e^{j\omega t} = e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

分析: $\omega \uparrow, |H(j\omega)| \downarrow$ (即对高频分量加权系数变小) \therefore 为低通。
当 $RC \uparrow$, 更小的 ω 可以获得与原同等的加权系数, 即截止频率降低。但系统响应变缓慢。

1.2 高通: 以电阻电压作为输出.

理解: 低频分量为 C 所阻绝, 高频分量则在 R 上产生压降, 将其输出, 则为高通.



微分: $RC \frac{dV_r(t)}{dt} + V_r(t) = RC \frac{dV_s(t)}{dt}$

令 $V_s(t) = e^{j\omega t}$ 可得

$G(\omega) = j\omega RC / (1 + j\omega RC)$

分析: $\omega \uparrow, |G(\omega)| \uparrow$ 且趋于 1, \therefore 高通

RC 个截止频率越低

$$R \cdot e \frac{dV_s(t)}{dt} = R \cdot dV_r(t)$$

$$RC \frac{d(V_s(t) - V_r(t))}{dt} = V_r(t)$$

$$RC \frac{dV_s(t)}{dt} = V_r(t) + RC \frac{dV_r(t)}{dt}$$

2. 离散时间滤波器: 递归 \rightarrow IIR, 非递归 \rightarrow FIR.

2.1 一阶递归离散时间滤波器

例: $y[n] - a y[n-1] = x[n]$

令 $x[n] = e^{j\omega n}$, 则 $y[n] = H(e^{j\omega}) e^{j\omega n}$.

$H(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n} - a H(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega(n-1)} = e^{j\omega n}$

$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$

分析: $0 < a < 1$ 低通, $|a|$ 越小带宽越宽.

$-1 < a < 0$, 高通

$H(\omega) = a^n \cdot u(n)$ (无限长)

2.2 非递归离散时间滤波器.

一般形式: $y[n] = \sum_{k=-N}^M b_k x[n-k]$

理解: 在 $x[n-M]$ 到 $x[n+N]$ 上取加权平均.

\therefore 对其思想为局部平均, 输入中快速变化的高频分量被平均, 而对低频分量影响不大.

$h[n] = \sum_{k=-N}^M b_k \delta[n-k]$ (矩形窗) (有限长)

$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cdot e^{-j\omega n}$ (来此后可分析其谱线)

例: 三点移动平均滤波器 (低通)

$y[n] = \frac{1}{3} [x[n-1] + x[n] + x[n+1]]$

例: 高通: $y[n] = \frac{x[n] - x[n-1]}{2}$

变化慢时 $y[n]$ 输出为值较小, 变化剧烈时 $y[n]$ 输出大.

注: 离散周期信号傅里叶级数的对偶性:

$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N}^N x[n] e^{-jk\omega_0 n}$ $x[n] = \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 n}$

$a_k = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{N} x[n] e^{jk\omega_0 n}$ 用 $-n$ 代 n

$= \sum_{n=-N}^N \frac{1}{N} x[-n] e^{-jk\omega_0 n}$

周期离散信号 $x[n]$ 的傅里叶级数 a_k 也是周期序列, 也存在级数表示式

$\therefore a_k \xrightarrow{Fs} \frac{1}{N} x[-n]$

$\therefore a_k \xrightarrow{Fs} \frac{1}{N} x[-n]$

附：三角形式的傅里叶级数展开式。(单边谱) ~~知道即可~~
 ↳ 实信号才能用。

记

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{T_1} x(t) \cos n\omega t dt \quad n \geq 1$$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{T_1} x(t) \sin n\omega t dt \quad n \geq 1$$

→ 可利用对称性
 → 求解。

↓ 同频率合并

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} x(t) dt$$

注：有的教材系数
 取半，再用 $a_0/2$ 作为
 直流量

记

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

$$x(t) = D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(n\omega t + \theta_n)$$

记

$$\begin{cases} a_0 = C_0 = D_0 \\ C_n = D_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n} \\ \theta_n = \arctan \frac{a_n}{b_n} \end{cases}$$

三角形与复指数形式之间的关系： $a_k \Rightarrow F_n$
 (为本质不同，表示式不同)

记

$$a_n = F_n + F_{-n}$$

记

$$b_n = j[F_n - F_{-n}]$$

$$F_n = \frac{1}{2}(a_n - j b_n)$$

$$F_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + j b_n)$$

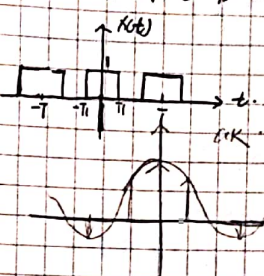
$$|F_n| = |F_{-n}| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} C_n = \frac{1}{2} D_n$$

三角形谱线高度为
 复指数形式的二倍。

奇谐信号谱线只含奇次谐波 不含偶次谐波与直流
 $F_n = a_n = b_n = 0 \quad n$ 取偶数

七、常见周期信号的傅里叶级数

1. 周期矩形脉冲



$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} dt = \frac{\tau}{T_1}$$

$$a_k = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} e^{-jk\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{T_1} \left[\frac{e^{-jk\omega t}}{-jk\omega} \right]_{-T_1/2}^{T_1/2}$$

$$= \frac{2}{k\omega T_1} \left(\frac{e^{jk\omega T_1/2} - e^{-jk\omega T_1/2}}{2j} \right)$$

VE

$$a_k = \frac{2 \sin k\omega \tau}{k\omega T_1} = \frac{2\tau}{T_1} \frac{\sin(k\omega \tau)}{k\omega \tau} \quad k \neq 0$$

理解：观察 a_k 可知，也是在频率点 $\omega = k\omega_0$ 处对 $\text{sinc}(\omega \tau)$

的取样，即 $a_k = \text{sinc}(\omega \tau) |_{\omega = k\omega_0}$

当 T_1 小时 脉冲宽度变大， $\text{sinc}(\omega \tau)$ (包络) 变窄，
 但 T_1 不变所以谱线位置不变。

当 $T_1 \rightarrow \infty$ 则 $x(t) \rightarrow 1$, $\text{sinc}(\omega \tau) \rightarrow \delta(t)$ (傅里叶变换)
 当 T_1 小, ω_0 小, 取样密度不断增大, 矩形变成包络 (包络(包络)变窄)

2. 周期序列:

$$a_k = \frac{1}{T_1} \sum_{n=0}^{T_1-1} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-T_1 k] \right] e^{-jk\omega n}$$

$$= \frac{1}{T_1} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

∴ 周期序列的傅里叶级数为一直数，也即
 周期的倒数。

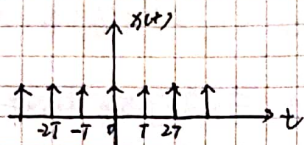
偶谐信号只有偶次谐波

奇谐：平均半周期与原波形关于坐标对称

偶谐：平均半周期与原波形关于坐标对称

3. 周期冲激串

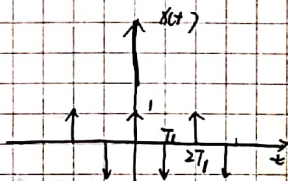
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$



$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) \cdot e^{-jk \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t} dt = \frac{1}{T} \end{aligned}$$

4. 交替周期脉冲串

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_1) \cdot (-1)^k$$



$$a_k = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} x(t) \cdot e^{-jk\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{T_1} [1 - (-1)^k] = \begin{cases} \frac{1}{T_1}, & k \text{ 取奇} \\ 0, & k \text{ 取偶} \end{cases}$$

$$\text{其中: } T = 2T_1, \quad \frac{1}{T} = \frac{2}{T_1}$$

[19年11月] 特征输入

某LTI因果离散系统处于0状态。若输入 $f[k] = (0.5)^k \cdot u[k]$ 时，输出 $y[k] = \delta[k] + a \cdot (0.25)^k \cdot u[k]$ 。若对所有 k ，当 $f[k] = (-2)^k$ 时，则有 $y[k] = 0$ 。

(1) 试确定 a 的值

(2) 若对所有 k ， $f[k] = 1$ ，试求 $y[k]$ 。

解: (1) $Y(z) = 1 + \frac{a}{1 - 0.25z^{-1}}$

$$F(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{F(z)} = (1 - \frac{1}{2}z^{-1}) \cdot [1 + \frac{a}{1 - 0.25z^{-1}}]$$

又: $f[k] = (-2)^k \xrightarrow{z} Y(z) = (-2)^k \cdot H(z)|_{z=-2} = 0$

$$\therefore H(-2) = 0 \Rightarrow a = -\frac{9}{8}$$

(2) $H(z) = (1 - \frac{1}{2}z^{-1}) \cdot [1 + \frac{-9/8}{1 - 0.25z^{-1}}]$

又 $f[k] = 1 = 1^n$

$$\therefore y[k] = 1^n \cdot H(z)|_{z=1} = 1$$

$$= \left[1 + \frac{-9/8}{3/4} \right] = \frac{1}{4} \quad (\text{所有 } k)$$

Chapter 4 连续时间傅里叶变换

一、从傅里叶级数到傅里叶变换

1. 非周期信号可以视为周期无穷大的周期信号。

2. 引出：设 $\tilde{x}(t)$ 为一周期为 T 的信号， $x(t)$ 为其一个周期的面积
 $\rightarrow (-T/2, T/2)$ 外取 0

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j\omega_0 k t}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

此时 a_k 仅在离散频点上有值，定义 $T a_k$ 的包络为 $X(j\omega)$

$$\therefore X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (\text{取样点上 } \omega = k\omega_0, k \text{ 为整数})$$

★ 那么 $a_k = \frac{1}{T} X(j\omega) |_{\omega = k\omega_0} = \frac{1}{T} X(jk\omega_0)$ ①

$$\begin{aligned} \therefore \tilde{x}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \cdot \omega_0 \quad * \end{aligned}$$

当 $T \rightarrow \infty, \tilde{x}(t) \rightarrow x(t), \omega_0 \rightarrow 0$

因此 $\omega_0 n dx, k\omega_0 \rightarrow X$ (连续)

∴ * 式按定积分精确定义收敛于：

$$\left\{ \begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned} \right.$$

3. ①式: 一个周期信号 $x(t)$ 的傅里叶系数等于其主周期信号截取的傅里叶变换的等间隔采样值加权 $\frac{1}{T}$

注: 傅里叶变换收敛条件: 狄利克雷。但是一些不满足此条件的奇函数也具有傅里叶变换。

二、周期信号的傅里叶变换

设 $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - \omega_0)$

有: $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega$

$$= e^{j\omega_0 t} \left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega) d\omega \\ e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - \omega_0) d\omega \end{array} \right.$$

推广: $X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - \omega_0)$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad **$$

★ 理解: 若 $x(t)$ 能表示成傅里叶级数形式, 那么, 他的周期信号傅里叶变换为谐波频率点上的冲激函数,

且 $\omega = k\omega_0$ 处脉冲强度为 $2\pi a_k$.

注: 为什么要从频域往时域推?

$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{j\omega t}| dt = \infty$, 所以利用定义不能从时域推频域

★ 纯虚信号: $\left\{ \begin{array}{l} X^*(-j\omega) = -X(j\omega) \\ X(-j\omega) = -X^*(j\omega) \end{array} \right.$ 利用 $x^*(t) \xrightarrow{F} X^*(-j\omega)$

纯虚偶函数: $\left\{ \begin{array}{l} X(-j\omega) = X(j\omega) \\ X^*(j\omega) = -X(j\omega) \end{array} \right. \Rightarrow$ 虚偶信号频谱仍为虚偶

纯虚奇函数: $\left\{ \begin{array}{l} X(-j\omega) = -X(j\omega) \\ X^*(j\omega) = X(j\omega) \end{array} \right. \Rightarrow$ 虚奇信号频谱仍为实奇函数

三、傅里叶变换的性质:

1. 线性: $ax(t) + by(t) \xrightarrow{F} aX(j\omega) + bY(j\omega)$

2. 时移: $x(t-t_0) \xrightarrow{F} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$ (时移使频谱线性相移)

↓ 对偶性质

3. 频移: $e^{j\omega_0 t} x(t) \xrightarrow{F} X(j(\omega - \omega_0))$

证明: 利用定义式变量替换即可。

4. 共轭: $x^*(t) \xrightarrow{F} X^*(-j\omega)$ (所有信号)

$x(t) = x(t)$ 实信号: $\left\{ \begin{array}{l} X(j\omega) = X^*(-j\omega) \\ X(-j\omega) = X^*(j\omega) \end{array} \right. *$ (实信号)

又 $X(j\omega) = \text{Re}\{X(j\omega)\} + j\text{Im}\{X(j\omega)\}$
 $X^*(j\omega) = \text{Re}\{X(j\omega)\} - j\text{Im}\{X(j\omega)\}$
 无法根据此式说 $X(j\omega)$ 为实函数

根据 * 式: $\Rightarrow \text{Re}\{X(-j\omega)\} = \text{Re}\{X(j\omega)\}$

$\text{Im}\{X(-j\omega)\} = -\text{Im}\{X(j\omega)\}$

即: 实信号频谱实部偶对称, 虚部奇对称。

同理由 * 式可推出 $\Rightarrow |X(j\omega)| = |X(-j\omega)|$
 $\angle X(j\omega) = -\angle X(-j\omega)$

即: 实信号频谱模值偶对称, 相位奇对称。

同理: 纯虚信号: 实部奇对称, 虚部偶对称
 频谱模值偶对称, 相位奇对称

由上式可知：若 $x(t)$ 为实偶信号则有

$$X(j\omega) = X(-j\omega) \Rightarrow X^*(j\omega) = X^*(j\omega)$$

实偶信号频谱 $X(j\omega)$ 为实偶函数。

若 $x(t)$ 为实奇信号： $X(-j\omega) = -X(j\omega)$

$$X^*(j\omega) = -X^*(j\omega)$$

⇒ 实奇信号频谱： $X(j\omega)$ 为纯虚奇函数。

注：任意实信号可以分解为奇部加偶部，因此可以利用共轭性质来求解。
偶分量对应频谱实部
奇分量对应频谱虚部

5. 时域微分： $\frac{d x(t)}{dt} \xrightarrow{F} j\omega X(j\omega)$

证明：逐次对 t ，对 ω 求导。

⇓ 对偶性

频域微分： $\frac{d X(j\omega)}{d\omega} \xrightarrow{F} -jt x(t)$

推广至高阶：

$$F[f^{(n)}(t)] = F[f(t) * \delta^{(n)}(t)] = (j\omega)^n \cdot F(\omega)$$

$$F^{-1}[(j\omega)^n F(\omega)] = (-jt)^n f(t)$$

注：若信号存在直流分量，则在求导过程中漏掉直流项，此应用时微分性质，造成缺项。

错题例： $[u(t)]' = \delta(t)$ 且 $\delta(t) \xrightarrow{F} 1$

∴ 由时域微分性质： $1 = j\omega F(u(t)) \Rightarrow F(u(t)) = \frac{1}{j\omega} \times$

事实上： $u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$

$$F(u(t)) = \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$$

将信号中心化去除直流分量。
判定有直流： $f(-\infty) + f(\infty) = 0$ 则
无直流，无直流。

6. 时域积分： $X(t) * u(t)$

$$\int_{-\infty}^t X(\tau) d\tau \xrightarrow{F} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$$

⇓ 对偶性

频积： $\frac{1}{jt} X(t) + \pi X(0) \delta(t) \xrightarrow{F} \int_{-\infty}^{\omega} X(j\eta) d\eta$

注：初始值 $f(-\infty) \neq 0$ ，使用积分性质存在积分。

常数问题，须注意。一般 $f(t)$ 复杂通过求导得到 $f'(t)$ ，求 $f(t)$ 的傅氏变换更方便。设 $F(f'(t)) = G(j\omega)$ ，则应有 $f(t) = \int_{-\infty}^t f'(\tau) d\tau + f(-\infty)$
∴ $F(f(t)) = F[\int_{-\infty}^t f'(\tau) d\tau] + F[f(-\infty)] = \frac{1}{j\omega} G(j\omega) + \pi G(0) \delta(\omega) + 2\pi f(-\infty) \delta(\omega)$

7. 尺度变换： $X(at) \xrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X(\frac{j\omega}{a})$

当 $a = -1$ ： $X(-t) \xrightarrow{F} X(-j\omega)$

理解：时域压缩 $|a|$ ，频谱扩展为 a 倍，同时幅度减小

$a > 1$ ：时域压缩，快放，频带展宽至更大范围，高频量增加，声音更尖锐细小。

$a < 1$ ：时域扩展，慢放，频带压缩，高频分量减少，声音低沉

因此 $G_{in}(t) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} X(t) = 1$

∴ $S_{in}(\frac{\omega}{z}) \rightarrow \delta(\omega)$ 注

1. 帕斯瓦尔定理： $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$

理解：信号能量既可从时域也可从频域计算。

8. 对称性: 由于傅里叶变换正反的对称性

则有: $F(f(\omega)) = 2\pi f(-\omega) / F^{-1}[2\pi f(-\omega)] = f(t)$

即: 时域上的信号 $f(t)$ 与 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 波形一致, 那么时域信号 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 将会是与 $f(t)$ 波形的卷积再加权 2π .

9. 时域卷积:

$x(t) * y(t) \xrightarrow{F} X(\omega) \cdot Y(\omega)$

可以卷积, 傅里叶变换定义证明.

两个系统级联总频响等于单个频响之间的乘积.

10. 时域卷积(调制):

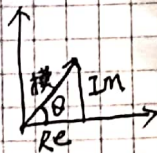
$S(t) \cdot p(t) \xrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} S(j\omega) * P(j\omega)$

过频谱模相角计算:

例: $\frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{\alpha - j\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$

$|\frac{1}{\alpha + j\omega}| = \sqrt{Re^2 + Im^2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$

$\theta = \arctan \frac{Im}{Re} = \arctan \frac{-\omega}{\alpha} = -\arctan \frac{\omega}{\alpha}$



$z = |z| \cdot e^{j\theta} = |z| \cdot e^{-j \arctan \frac{\omega}{\alpha}}$

四. 常用信号傅氏变换

1. 单边指数信号: $e^{-\alpha t} \cdot u(t) \xrightarrow{F} \frac{1}{\alpha + j\omega} \quad \alpha > 0$

2. 双边指数信号: $e^{-\alpha|t|} \xrightarrow{F} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \quad \alpha > 0$

3. 矩形信号: $[u(t+t_1) - u(t-t_1)] \xrightarrow{F} \frac{2\sin \omega t_1}{\omega}$

4. $\frac{\sin \omega t}{\omega t} \rightarrow [u(\omega + \omega) - u(\omega - \omega)]$

以上利用定义法可算出.

5. $\delta(t) \rightarrow 1 \quad x(t) = c \Rightarrow 2\pi c \delta(\omega)$

$\delta(t-t_0) \rightarrow e^{-j\omega t_0}$

6. 冲激偶: $\delta'(t) \rightarrow j\omega$ (微分性质)

证: $F^{-1}(1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega = \delta(t)$

两边对 t 求导: $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega \cdot e^{j\omega t} d\omega = \delta'(t)$

$\therefore F(\delta'(t)) = j\omega$

7. 符号函数: $f(t) = \text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \xrightarrow{F} \frac{2}{j\omega}$

证: 令 $f_1(t) = e^{-\alpha|t|} \cdot \text{sgn}(t) \xrightarrow{F} F_1(\omega) = \frac{1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega}$

$F(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} F_1(\omega) = \frac{2}{j\omega} \quad (\lim_{\alpha \rightarrow 0} f_1(t) = \text{sgn}(t))$

8. 阶跃: $u(t) \xrightarrow{F} \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$

$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t) \rightarrow \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$

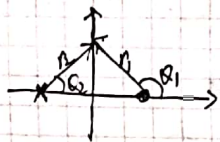
9: 三角函数: $\sin \omega t \xrightarrow{F} \frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$

$\cos \omega t \xrightarrow{F} \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$

注: 模与相角计算总结:

$$|H(j\omega)| = \left| \frac{a+jb}{c+jd} \right| = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}$$

$$\angle H(j\omega) = \arctan \frac{b}{a} - \arctan \frac{d}{c}$$



$$\angle H(j\omega) = \theta_1 - \theta_2$$

$$|H(j\omega)| = \frac{r_1}{r_2}$$

[例题] 求信号 $x(t) = \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k \cdot \frac{\pi}{4})$ 的傅里叶变换.

法①: 线性性质:

$$X(j\omega) = \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j \frac{k\pi}{4} \omega} \quad \text{不收敛}$$

因此此法不适用, 同理用定义式也求不出来.

法②: 此信号为周期脉冲串, 考虑先求复傅里叶级数.

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (\text{只需在一个周期积分})$$

$$T = \frac{\pi}{4} \quad (\text{每 } \frac{\pi}{4} \text{ 一个脉冲}) = \frac{4}{\pi} \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \pi \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k \cdot \frac{\pi}{4}) \right] e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{4}{\pi} \cdot \pi = 4$$

$$\therefore G(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

$$= 8\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k \cdot \frac{\pi}{4})$$

注: 在有些周期信号用定义式无法得出傅里叶变换,

应考虑使用傅里叶级数与傅里叶变换的关系.

且此类信号均以无穷项求和形式给出.

非线性移位.

[例 4.35] 有一 LTI 系统 $H(j\omega) = \frac{a-j\omega}{a+j\omega}$, $a > 0$.

- ① 求 $|H(j\omega)|$, $\angle H(j\omega)$, $h(t)$.
- ② 当 $a=1$, $x(t) = \cos(t/\sqrt{3}) + \cos t + \cos \sqrt{3}t$ 求输出 $y(t)$.

解: ① $|H(j\omega)| = \left| \frac{a-j\omega}{a+j\omega} \right| = \frac{\sqrt{a^2+\omega^2}}{\sqrt{a^2+\omega^2}} = 1$

$\angle H(j\omega) = \arctan \frac{-\omega}{a} - \arctan \frac{\omega}{a} = -2\arctan \frac{\omega}{a}$.

$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{-1 + \frac{2a}{a+j\omega}\right\}$

$\therefore h(t) = -\delta(t) + 2ae^{-at}u(t)$

② $a=1 \therefore H(j\omega) = 1 \cdot e^{-j2\arctan \omega}$

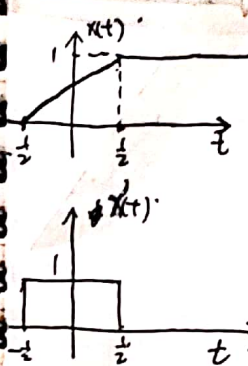
$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$

* 注意到 $|H(j\omega)|$ 对于不同频率的信号幅度不变化
 相位改变量因信号频率不同而不同. 例如: $-\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \frac{\pi}{3}$
 $1 \rightarrow \frac{\pi}{4}$, 因此对于 $\cos(t/\sqrt{3})$ 来说它的
 两个正负频率延迟不同, 也就不可能对其谱使用
 时域性质求反变换.

将 $X(j\omega)$ 写出, 再将 $Y(j\omega)$ 写出, 再对每一个延迟
 脉冲求 $\delta(\omega - \omega_0) \cdot e^{-j2\arctan \omega_0}$. 使用时域性质, 可得

$y(t) = \cos(t/\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}) + \cos(t - \frac{\pi}{4}) + \cos(\sqrt{3}t - \frac{\pi}{3})$.

$x(t) = \frac{1}{2} [e^{j\frac{t}{\sqrt{3}}} + e^{-j\frac{t}{\sqrt{3}}}] + \frac{1}{2} [e^{jt} + e^{-jt}] + \frac{1}{2} [e^{j\sqrt{3}t} + e^{-j\sqrt{3}t}]$
 $y(t) = \frac{1}{2} [e^{j\frac{t}{\sqrt{3}}} \cdot e^{-j2\arctan \frac{1}{\sqrt{3}}} + e^{-j\frac{t}{\sqrt{3}}} \cdot e^{j2\arctan \frac{1}{\sqrt{3}}} + e^{jt} \cdot e^{-j2\arctan 1} + e^{-jt} \cdot e^{j2\arctan 1} + e^{j\sqrt{3}t} \cdot e^{-j2\arctan \sqrt{3}} + e^{-j\sqrt{3}t} \cdot e^{j2\arctan \sqrt{3}}]$



法① $x'(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2\sin \frac{1}{2}\omega}{\omega}$
 $x(t) = \int_{-\infty}^t x'(t) dt + x(-\infty)$ (无积分常数)
 $\therefore X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{2\sin \frac{1}{2}\omega}{\omega} + \tau_0 \cdot \delta(\omega)$

法② $x(t) = x(t) \cdot \frac{1}{j\omega}$
 $x'(t) = X'(t)$
 $x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{2\sin \frac{1}{2}\omega}{\omega} \therefore X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{2\sin \frac{1}{2}\omega}{\omega}$

存在直流量信号的傅氏变换解法 \rightarrow

对于 $\cos(\omega_0 t + \theta)$ 的响应 (\cos 为实信号)
 $\frac{1}{2} [e^{-j(\omega_0 t + \theta)} + e^{j(\omega_0 t + \theta)}]$
 $\frac{1}{2} [e^{-j\omega_0 t} \cdot |H(j\omega_0)| \cdot e^{-j\angle H(j\omega_0)} + e^{j\omega_0 t} \cdot |H(j\omega_0)| \cdot e^{j\angle H(j\omega_0)}]$
 $= \frac{1}{2} |H(j\omega_0)| [e^{-j(\omega_0 t + \theta + \angle H(j\omega_0))} + e^{j(\omega_0 t + \theta + \angle H(j\omega_0))}]$
 $= |H(j\omega_0)| \cdot \cos(\omega_0 t + \theta + \angle H(j\omega_0))$ (*)

conclusion: 在实域下, $\cos(\omega_0 t + \theta)$ 响应可直接用 (*)

Chapter 5 离散时间傅里叶变换.

一、从离散时间傅里叶级数到傅里叶变换.

图 1、 $\tilde{x}[n]$ 为以 N 为周期的序列, $x[n]$ 为其一个周期的截取.

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{x}[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \\ a_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \end{aligned} \right.$$

$\downarrow \langle N \rangle$ 选取 $x[n]$ 持续范围, $\tilde{x}[n] = x[n]$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_2} \tilde{x}[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \end{aligned}$$

定义包络函数: $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$

★ 那么 $a_k = \frac{1}{N} X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=k\omega_0} = \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0})$ (*)

即为包络的 $2\pi/N$ 间隔无穷采样

$$\therefore \tilde{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n}$$

$$\downarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{N} \quad \frac{2\pi}{\omega_0} = N$$

$$x[n] = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \right] \frac{1}{2\pi} \quad (*)$$

∴ 当 $N \rightarrow \infty$ 时: “ \sum ” \rightarrow “ \int ”, “ ω_0 ” \rightarrow “ $d\omega$ ”, 又: $(*)$ 式求和项在 N 个宽 $\omega_0 = 2\pi/N$ 的间隔内完成的, 所以积分也限于 2π 范围内

因此得出: $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

[关联] 离散傅里叶系数与离散傅里叶变换的关系。

2,

即: (x*)式: 周期信号的傅里叶系数为其一个周期截取信号的傅里叶变换的以 $w_0 = \frac{2\pi}{N}$ 为间隔的采样值的 $\frac{1}{N}$ 。(同连续时间)。

这是由傅里叶变换引出所产生的关系。

[收敛] 对于有限长序列其傅里叶变换一定为有限值, 不涉及收敛性问题。

对于无限长序列的傅里叶变换要收敛则需满足:

① 绝对可加: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty$

或 ② 能量有限: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < \infty$

同时: 对于连续信号来说其利用多次频率分量合成原信号会存在吉布斯现象(对于某些信号其频谱反变换得到的信号与原信号相比在断点处有吉布斯现象)而离散序列则不存在, 因为它本身处处离散。

conclusion: 周期信号: $a_k \Leftrightarrow X(e^{j\omega})$

$a_k = \frac{1}{N} X(e^{j\omega})|_{\omega = k\omega_0} \Leftrightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N})$

二、周期信号的离散傅里叶变换。

1. 对于 $X[n] = e^{j\omega_0 n}$

$\downarrow F$
 $X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$

周期
位于 $\omega = \omega_0 + 2\pi l$ 处的冲激

又周期信号可表示为: $X[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$

那么根据线性性质:

$X(e^{j\omega}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\omega - k\omega_0 - 2\pi l)$

每个单一脉冲周期表示
转为
一组脉冲的周期表示

$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N})$ (*)

理解: 周期信号的傅里叶变换在一个周期内为其 $k\omega_0$ 频点上以 $2\pi a_k$ 为脉冲强度的 N 个冲激, 由于 $X(e^{j\omega})$ 与 a_k 的周期性性质, 其完整谱图为其一个周期内波形的延拓。(与连续时间差别仅在周期性)。

三、离散傅里叶变换的性质

1. 周期性: $X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$

本质原因: $e^{j\omega n}$ 以 2π 为周期。

$\therefore X(e^{j\omega}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n} = X(e^{j(\omega+2\pi)})$

2. 线性: $a x_1[n] + b x_2[n] \xrightarrow{F} a X_1(e^{j\omega}) + b X_2(e^{j\omega})$.

3. 时移 + 频移:

$$x[n-n_0] \xrightarrow{F} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

$$e^{j\omega n_0} x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

4. 共轭: $x^*[n] \xrightarrow{F} X^*(e^{-j\omega})$

4.1 实信号: $x^*[n] = x[n]$ ∴

$$\begin{cases} X^*(e^{-j\omega}) = X(e^{j\omega}) & * \\ X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega}) & ** \end{cases}$$

$$\text{又: } X(e^{j\omega}) = \text{Re}\{X(e^{j\omega})\} + j \text{Im}\{X(e^{j\omega})\}$$

$$X(e^{-j\omega}) = \text{Re}\{X(e^{j\omega})\} + j \text{Im}\{X(e^{-j\omega})\}$$

$$X^*(e^{-j\omega}) = \text{Re}\{X(e^{j\omega})\} - j \text{Im}\{X(e^{j\omega})\}$$

由*式可推: $\text{Re}\{X(e^{j\omega})\} = \text{Re}\{X(e^{-j\omega})\}$ 实部偶对称

$\text{Im}\{X(e^{j\omega})\} = -\text{Im}\{X(e^{-j\omega})\}$ 虚部奇对称

同理可得: $|X(e^{j\omega})|$ 为 ω 的偶函数.

$\angle X(e^{j\omega})$ 为 ω 的奇函数.

4.2 实偶信号: $x[-n] = x[n]$ 所以有:

$$X(e^{-j\omega}) = X(e^{j\omega}) \text{ 且 } X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega})$$

则 $X^*(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \Rightarrow$ 实信号

∴ $\begin{cases} \text{实偶信号} \Rightarrow \text{实偶频谱} \\ \text{实奇信号} \Rightarrow \text{纯虚奇频谱} \end{cases}$

4.2 虚信号: $\begin{cases} X^*(e^{j\omega}) = -X(e^{j\omega}) \\ X(e^{-j\omega}) X(e^{-j\omega}) = -X^*(e^{j\omega}) \end{cases}$

虚偶信号 \Rightarrow 虚偶频谱

虚奇信号 \Rightarrow 实奇频谱

注: 与连续情况一致, 将信号拆成奇部偶部可知, 偶部对应实部, 奇部对应虚部.

5. 差分与累加:

$$x[n] - x[n-1] \xrightarrow{F} (1 - e^{-j\omega}) X(e^{j\omega}) \quad (\text{目标推导})$$

$$\sum_{m=-\infty}^n x[m] \xrightarrow{F} \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j\omega}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

↳ $x[n] * u[n]$ $X(e^{j\omega}) \cdot \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$ 直流

6. 时间反转: $x[-n] \xrightarrow{F} X(e^{-j\omega})$

7. 时域扩展: $X_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k] & n \text{ 为 } k \text{ 的整数倍} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

内插

$|k| > 1$

以 $k-1$ 个零值插入序列两值之间.

推导: $X_{(k)}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[n] \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[r] e^{j\omega rk} = X(e^{j\omega k})$

$$\text{又 } x_{(k)}[rk] = x[r]$$

$$\text{则 } X_{(k)}(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[r] e^{-j\omega rk} = X(e^{j\omega k})$$

注: 时域扩展 k 倍, 频谱压缩 k 倍, 同内插(增采样).

8. 频域微分: $j\omega X(\omega) \xrightarrow{F} \frac{d(x(t))}{dt}$ (注意直边)

9. 帕斯瓦耳定理: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$

10. 卷积性质:

$x(n] * h(n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$

11. 时域相乘:

$x_1(n] \cdot x_2(n] \xrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$

频域周期卷积

12. 离散傅里叶变换与连续时间傅里叶级数的对偶性

由于离散傅里叶变换正变换不具备对偶性, 其运用方便性下降, 但是其和连续傅里叶级数存在对偶性

$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$

观察可知: 若 $T=2\pi$ 且 a_k 表达式与 $X(\omega)$ 一致, 则 $X(\omega)$

$\xrightarrow{F} X(e^{j\omega})$ 即与 $X(t)$ 表达式一致

例: $g(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \tau/2 \\ 0 & \tau/2 < |t| < \tau \end{cases} \quad (T=2\pi) \xrightarrow{F} a_k = \frac{\text{sinc}(k\tau/2)}{k\tau}$

$X(\omega) = \frac{\text{sinc}(\tau/2 \cdot \omega)}{\tau} \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = g(-\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \tau/2 \\ 0 & \tau/2 < |\omega| < \pi \end{cases}$

↓
与 a_k 表达式一致

注: 离散 \leftarrow 对比 \rightarrow 连续时间 \sim 性质

同: 线性, 时移, 频移, 共轭, 时间反转, 卷积, 相乘, 帕斯瓦耳

- 异:
- 1. DFT 频谱有周期性
 - 2. DFT 只有频域微分特性
 - 3. DFT 有差分与累加特性
 - 4. DFT 无对偶性, 但 DFT 与连续傅里叶级数有对偶性
 - 5. DFT 只有时域扩展

四. 常见离散序列 傅里叶变换

1. 指数序列: $a^n u(n], |a| < 1 \xrightarrow{F} \frac{1}{1 - ae^{j\omega}}$

$a^n u(-n-1], |a| < 1 \xrightarrow{F} \frac{ae^{j\omega}}{1 - ae^{j\omega}}$ (记得)

3. $a^n \cdot u(-n), |a| > 1 \xrightarrow{F} \frac{1}{1 - ae^{j\omega}}$

2. $\delta(n] \xrightarrow{F} 1 \quad \delta[n - n_0] \xrightarrow{F} e^{-j\omega n_0}$

3. 常序列: $1 \xrightarrow{F} 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n)$ (DFT 与 F_s 对偶性)

4. 矩形序列: $X(\omega) = \begin{cases} 1 & |m| \leq N_1 \\ 0 & |m| > N_1 \end{cases} \xrightarrow{F} \frac{\text{sinc}(\omega N_1/2)}{\sin \frac{\omega}{2}}$

$\frac{\text{sinc}(\omega N_1/2)}{2\pi} \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |k| \leq N_1 \\ 0 & |k| > N_1 \end{cases}$

5. 阶跃序列: $u(n] \xrightarrow{F} \frac{1}{1 - e^{j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$ (记得)

注: 离散 \leftarrow 对比 \rightarrow 连续 \sim 变换对

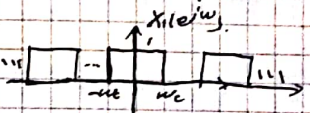
同: $\delta(n] \sim \delta(t)$, 常序列 \sim 常数函数 (不考虑周期性 DFT)

典型题:

[奥本: 5.15] 设 $Y(e^{j\omega})$ 的逆变换为: $y[n] = \left(\frac{\sin n\omega\pi}{\pi n}\right)^2$

其中 $0 < \omega_c < \pi$, 试确定 ω_c 以保证: $Y(e^{j\pi}) = \frac{1}{2}$.

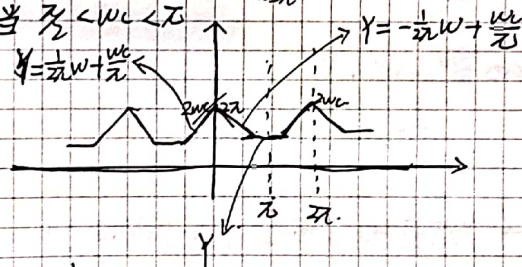
解: $Y(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) * X_2(e^{j\omega})$ (周期卷积)

$$X_1(e^{j\omega}) = u(\omega + \omega_c) - u(\omega - \omega_c)$$


① 当 ω_c 小于 $\frac{\pi}{2}$ 时

$Y(e^{j\omega})$:  此时 $\omega = \pi$ 处 $Y(e^{j\omega}) = 0$ 不符条件.

② 当 $\frac{\pi}{2} < \omega_c < \pi$



$$\begin{aligned} Y &= \left[\frac{1}{2}\omega - 2\pi + \frac{\omega_c}{\pi} \right] + \frac{1}{2}\omega + \frac{\omega_c}{\pi} \\ &= \frac{2\omega_c}{\pi} - 1 = \frac{1}{2} \\ \omega_c &= \frac{3}{4}\pi \end{aligned}$$

[奥本.5.7] $X_3(e^{j\omega}) = A(\omega) + e^{jB(\omega)}$

其中 $A(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \frac{\pi}{8} \\ 0, & \frac{3\pi}{8} \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$

$B(\omega) = -\frac{3\omega}{2} + \pi$

判断 $X_3(e^{j\omega})$ 的实/虚, 偶/奇对称.

解: $X_3(e^{j\omega})$ 为和式形式, 因此将其拆解为两部分
分别分析:

$A(\omega)$ 为实偶函数 因此 其对应时域信号为实偶信号

对于 $e^{jB(\omega)} = e^{j\pi} \cdot e^{-j\frac{3\omega}{2}} = \cos(\frac{3\omega}{2} + \pi) + j\sin(\frac{3\omega}{2} + \pi)$
 $= \cos(\frac{3\omega}{2} + \pi) - j\sin(\frac{3\omega}{2} + \pi) = -\cos\frac{3\omega}{2} + j\sin\frac{3\omega}{2}$

$e^{jB(-\omega)} = -\cos\frac{3\omega}{2} - j\sin\frac{3\omega}{2}$

$[e^{jB(-\omega)}]^* = -\cos\frac{3\omega}{2} + j\sin\frac{3\omega}{2} = X_3(e^{j\omega})$

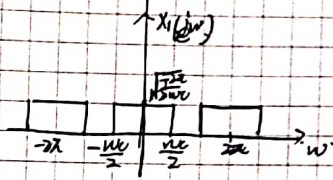
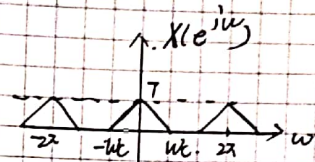
$\therefore e^{jB(\omega)} \xrightarrow{F^{-1}} x_2[n]$ 为实信号, 又对称性

$\therefore X_3(e^{j\omega}) \xrightarrow{F^{-1}} x_3[n]$ 为实信号, 又对称性.

注: 求以下频谱傅氏反变换:

① 利用频域卷积性质:

$X_3(e^{j\omega}) \cdot X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\omega'}) X_3(e^{j(\omega-\omega')}) d\omega'$



② 分析 $X_1(e^{j\omega})$ 频谱

对于主周期

$X_1(e^{j\omega}) * X_1(e^{j\omega})$ 其高度

为 T , 那么有:

$[\frac{\omega_c}{2} - (\frac{\omega_c}{2})] * h^2 = T * 2\pi$

$\therefore h = \frac{\sqrt{2\pi T}}{N \omega_c}$

$\frac{1}{N} X_1(\omega) =$

$X_1(\omega) = [X_1(\omega)]^2$
 $= \frac{2\pi T}{N \omega_c} \left(\frac{\sin(\frac{\omega_c}{2} n)}{\pi n} \right)^2$

$\therefore X_1(e^{j\omega}) = \frac{\sqrt{2\pi T}}{N \omega_c} \cdot [K(\omega + \frac{\omega_c}{2}) - U(\omega - \frac{\omega_c}{2})]$

注: 不要漏掉系数.

Chapter 6 信号与系统的时域频域特性

一、模与相位

1. 模 $|X(e^{j\omega})|$ 描述一个信号的基本频率含量，即经复指数信号相对振幅信息。

$|X(e^{j\omega})|^2$ 为 $X(t)$ 的能量谱密度。

2. 相位角 $\angle X(e^{j\omega})$ 不影响各频率分量的大小，提供复指数信号的相对相位信息。

★ 信号通过系统使得其谱线模值与响应模值对应频率处相乘，相角在对应频率处相加得到新信号相应模值相位表示式。因此相当于给该频率分量加一个复数系数 $|H(e^{j\omega})| \cdot e^{j\angle H(e^{j\omega})}$ ，对应于时域上该频率分量加一个复数系数。

4. 线性相位、非线性相位

4.1 线性： $\angle H(e^{j\omega}) = \alpha\omega$

$$\therefore Y(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| \cdot |H(e^{j\omega})| \cdot e^{j\angle H(e^{j\omega})} = e^{j\alpha\omega}$$

离散时 α 为整数延迟 $-\alpha$ 单位。

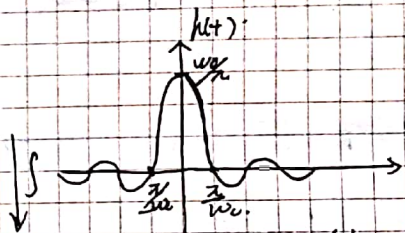
4.2 非线性：在输入各不同的频率的复指数信号分量其相位都不同，当这些信号再次叠加组合后的信号与原信号相位有很大差异。

5. 群时延: $\tau(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}$

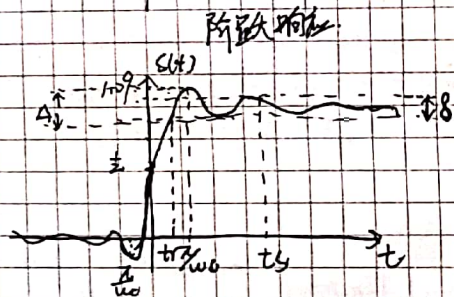
它反映了相位相对于频率处变化的剧烈程度。

二、

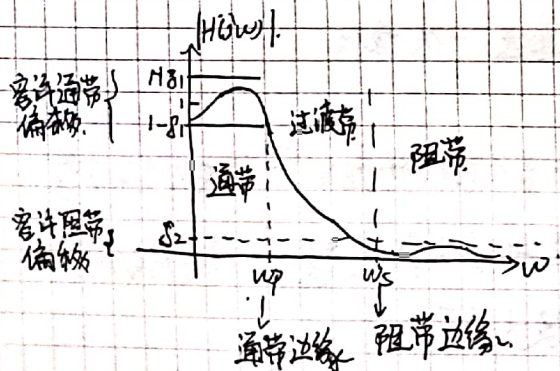
伯德图: $1 \text{ dB} = 20 \log_{10}$ 纵轴 $\sim |H(\omega)|$, ϕ $H(\omega)$
 横轴 $(\log_{10}(\omega))$ 横轴 (连续时间)



带宽 ω_c 越大, 主瓣越窄,
 建立上升时间越短

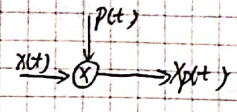


Δ : 超量
 t_r : 上升时间
 t_s : 建立时间
 δ : 容许偏差



Chapter 7 采样

一、冲激采样

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$$


$$x_p(t) = x(t) \cdot p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \cdot \delta(t-nT)$$

时域采样信号为 $t=nT$ 上以 $x(nT)$ 为强度的脉冲串

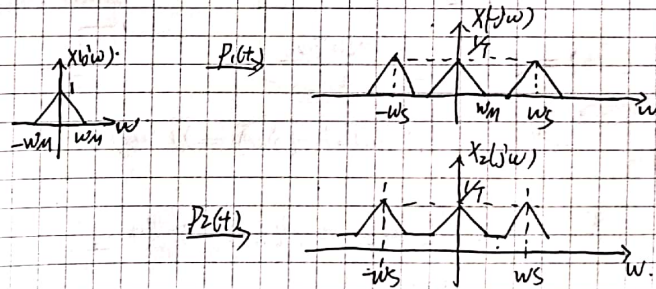
→ F_s 与 F_b 的关系

$$p(t) \xrightarrow{F} p(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_s), \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

$$x_p(j\omega) = \frac{1}{T} x(j\omega) * p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(j(\omega - k\omega_s))$$

频域: 采样信号频谱是原信号谱以 ω_s 为间隔

周期移位, 并且幅度加权 $\frac{1}{T}$.



当 $\omega_s - \omega_m > \omega_m$ 即 $\omega_s > 2\omega_m$ 时不混叠

采样定理: 若 $x(t)$ 为一带限信号, $|w| > \omega_m$ 时, $x(jw) = 0$

若 $\omega_s > 2\omega_m$, 其中 $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ 那么 $x(t)$ 就唯一地由样本 $x(nT)$ 所确定.

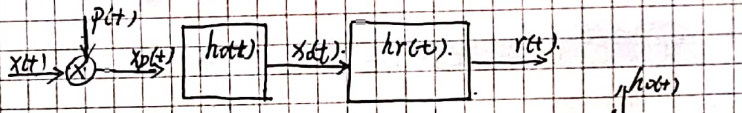
$\left\{ \begin{array}{l} 2\omega_m \text{ 奈奎斯特频率 (有教材作)} \\ \omega_m \text{ 查奈斯特频率 (区分)} \end{array} \right.$

二、零阶保持采样

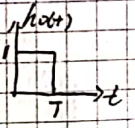
1. 即在一个给定的瞬间对 $x(t)$ 采样并保持这一样本值, 直到下一个样本被采集为止.

2. 实现: 冲激采样之后通过一个具有 $h(t)$ 为矩形的 LTI 系统. (时域卷积, 使得 $h(t)$ 各位加权, 达到目的).

3. 若要将零阶保持采样率输出恢复出来就不能使用理想低通滤波器, 因为此时 $X_p(jw)$ 不再为 $X(jw)$ 的周期复制.

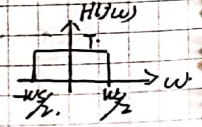


$$H_o(jw) = e^{-jwT/2} \left[\frac{2 \sin(wT/2)}{w} \right]$$



$$\therefore X_r(jw) = X_p(jw) \cdot H_o(jw) \cdot H_r(jw) = X(jw)$$

$$\therefore H_r(jw) \cdot H_o(jw) = H(jw) \Rightarrow \text{其中}$$



等效为理想低通滤波器.

$$\therefore H_r(jw) = \frac{H(jw)}{H_o(jw)}$$

三、信号的重构

截止频率一般选 $\omega_s/2$.

在频域上信号频谱通过低通理想滤波器获得到原信号频谱.

在时域上表现为 $x_p(t)$ 与 $\frac{T \sin(wct)}{\pi t}$ 卷积, 因此信号由 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \text{sinc}(wct - nT)$ 各位, 加权, 求和重构起来.

这种利用理想低通滤波器的单位脉冲响应的内插称为带限内插.

$$X_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT) \cdot \frac{\sin(wc(t-nT))}{\pi(t-nT)}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(nT) \cdot \frac{wT \cdot \sin(wc(t-nT))}{\pi wT(t-nT)}$$

四、混叠现象

当 $\omega_s < 2\omega_m$ 时信号频谱将产生混叠. 当 $w_c = \frac{\omega_s}{2} \Rightarrow \frac{wT}{\pi} = 1$ 此时 $t = nT, x(nT) = X(nT)$

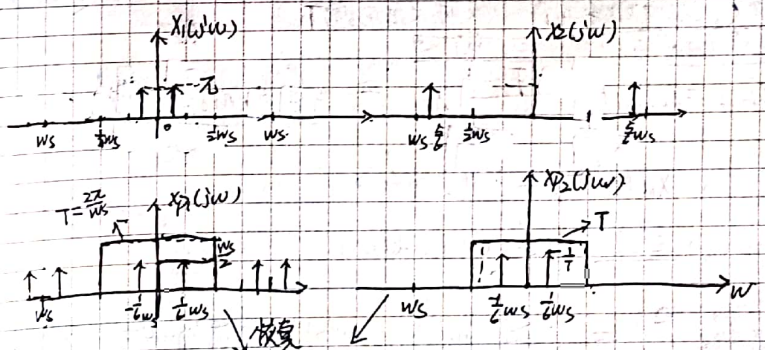
不同信号以相同 ω_s 采样其样本 $x_p(t)$ 可能相同, 但这

是两个不同的信号, 至少有一个满足此 ω_s 下的采样定理.

且由此样本 $x_p(t)$ 恢复出的信号为满足采样定理的那.

如: 当 $\omega_0 = \frac{1}{2}\omega_s$ 时, $\omega_1 = \frac{5}{6}\omega_s$ 时

信号 $\cos \omega_0 t$, $\cos \omega_1 t$ 以 ω_s 抽样, $x_p(t) = x_r(t)$



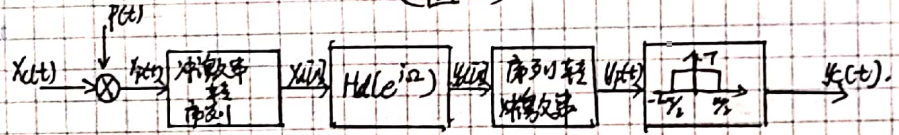
$$X_r(jw) = \frac{T}{2\pi} [\delta(w - \frac{1}{2}\omega_s) + \delta(w - \frac{5}{6}\omega_s)] \cdot T$$

$$= \cos(\frac{1}{6}\omega_s t)$$

同一信号以不同 ω_s 采样, 其得到的离散时间序列 $X_d[n]$ 可能一样, 但 $X_p(t)$ 不一样, 因为取采样位置一定不同, 所以信号重构出的为满足采样定理的。重构的依据为 $X_p(t)$ 其除了时间信息 T , $X_d[n]$ 无时间信息。

注: 若采样频率为 $2\omega_m$ 则不能保证信号能正确恢复, 例如对 $\sin(\omega_m t)$ 以 $2\omega_m$ 抽样可能会导致采样点均为 0 点, 因此输出信号 $X_r(t)$ 为 0。

五. 连续信号的离散时间处理 (图一)



冲激串 \rightarrow 离散序列 [频轴归一] $T > 1$

频域: $X_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_d[n] \delta(t - nT)$ \xrightarrow{FT} $X_p(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_d[n] e^{-j\omega n T}$

冲激串频谱比序列频谱仅轴尺度因子 T
 * (即 $X_p(j\omega)$ 是 $X_d(j\omega)$ 频轴压缩 T 倍)

对比: $\omega T = \Omega$

$X_d[n] = X_c[nT] \xrightarrow{DTFT} X_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_c[nT] e^{-j\omega n}$

$\therefore X_d(e^{j\omega}) = X_p(j\Omega/T)$, $\Omega = \omega T$ \rightarrow 采样间隔

又: $X_p(j\omega) \stackrel{\text{若轴归一}}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j(\omega + k\omega_s))$

$\therefore X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j(\omega/T + k\omega_s)) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j(\omega - 2\pi k)/T)$

\therefore 序列频谱为原信号频谱频轴压缩后以 2π 为周期做等效叠加 (冲激串)

注: 序列频谱以 2π 为周期, 冲激串谱以 ω_s 为周期, 因此序列中 $\Omega = 2\pi$ 对应的真实频率为 $\omega_s \text{ rad}$ 。由于原信号为带限的, 因此其原信号频率含量范围 $< (\omega_s/2, \omega_s/2)$

时域上将 $X_p(t)$ 的时间信息归一, 归一为 $n=1$, 这一点也对应着傅里叶变换的尺度性质, 时域扩展, 频域压缩。

离散序列 \rightarrow 冲激串 \rightarrow 连续信号 (信号重构)

$X_d[n] \rightarrow X_p(t) \rightarrow X_r(t)$

① $X_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_d[n] \delta(t - nT) \xrightarrow{h(t)} h_r(t) = \frac{T \sin(\omega_s/2 t)}{\pi t}$

② 低通滤波 (带限内插): $X_r(t) = X_p(t) * h_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_r(t - nT) X_d[n]$

$t = nT$ 时, $X_r(nT) = X_d[n]$

对应: 频轴压缩 T 倍, 重新标定

3. 对于整个系统而言仍为线性时不变连续时间系统。

很显然: $Y_c(j\omega) = X_c(j\omega) \cdot H_d(e^{j\omega T})$

因为 C/D, D/C 转换不改变输入信号特性。这里表示连续时间

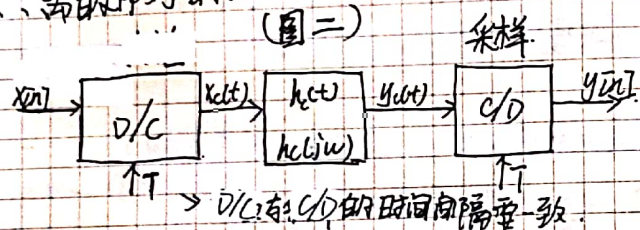
设这个系统频响为 $H_c(j\omega)$, 那么将得:

$H_c(j\omega) = \begin{cases} H_d(e^{j\omega T}), & |\omega| < \omega_s/2 \\ 0, & |\omega| > \omega_s/2 \end{cases}$

$H_c(j\omega)$ 即为 $H_d(e^{j\omega})$ 的主周期, 并使频轴重新标定。

注：被冲激采样不是时不变的，因此只有当采样率足够高且输入信号带限，避免混叠，这个系统才为 LTI 系统。

六、离散序列的连续时间处理



1. 非整数延迟 (离散连续时间处理)

离散序列中信号只能以整数间隔移，现利用冲激序列与序列间的关系将离散时间与连续时间关联起来。

→ 其中 $\omega_s = 2\pi/T$ (滤波器) 限

①
$$X_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X[n] \frac{\sin[\omega_s(t-nT)]}{\omega_s(t-nT)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X[n] \frac{\sin[\omega_s t - \omega_s nT]}{\omega_s(t-nT)}$$

(对 $x_c(t)$ 滤波)

②
$$X_c(t - \Delta T) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k] \frac{\sin[\omega_s(t - \Delta T - kT)]}{\omega_s(t - \Delta T - kT)}$$

∴ $X[n] = X_c[nT] = X_c(t) |_{t=nT}$

∴
$$X[n - \Delta] = X_c(t - \Delta T) |_{t=nT} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k] \frac{\sin[\omega_s(nT - \Delta T - kT)]}{\omega_s(nT - \Delta T - kT)}$$

↓

$$= X[n] * \frac{\sin \omega_s(n - \Delta)}{\omega_s(n - \Delta)}$$

★ 即 $h[n] = \frac{\sin \omega_s(n - \Delta)}{\omega_s(n - \Delta)}$ (Δ 为延迟量, 可为非整数)

当 Δ 为整数时 $h[n] = X[n] * \delta[n - \Delta] = X[n - \Delta]$

2. 数字微分器 (连续时间离散处理)

要确定离散处理系统响应, 假设其输入

* $x_c[n] = \frac{1}{T} \delta[n]$, 则可连续时间信号应为:

↓ 内插

$x_c(t) = \frac{\sin(\omega_s t / T)}{\pi t}$, 那目标输出为 $x_c(t)$ 的导数。

↓ 求导

$y_c(t) = \frac{\cos(\omega_s t / T)}{Tt} - \frac{\sin(\omega_s t / T)}{\pi t^2}$, 那么可以知道处理系统输出为其采样。

↓

* * $y_c[n] = y_c(nT) = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{nT^2}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$

故 * * 那么可以求出 $H_d[n] = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{nT}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$

$H_d[n] * X_d[n] = Y_d[n]$

注: 再与图 1 分析。1 中的非整数延迟实际等效为一个离散时间系统, 其延迟 Δ 为整数时输入 $x_c[n]$ 相当于对 $x_c(t)$ 采样, 输出相当于对 $x_c(t - \Delta T)$ 采样, 仅此。对于 1 它也可以按照图 1 的思路设计为连续时间离散处理系统, 其离散处理系统等价于 1 中整个系统响应。2 中 Δ 为一等效连续时间系统, 其也可以按照图 2 的思路设计为一离散时间系统, 那么其输入 $x_c[n]$ 应为 $x_c(t)$ 的采样, 其输出为 $\frac{dx_c(t)}{dt}$ 的采样。

七. 离散序列的采样

1. 即每隔 N 个值对原序列进行提取, 得到样本序列

$$x_p[n] = \begin{cases} x[n], & n \text{ 为 } N \text{ 的整数倍} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

分析: $x_p[n] = x[n] \cdot p[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[kN] \delta[n - kN]$

↓ 下, 频域 (1):

$$X_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(e^{j\theta}) \cdot X(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{N}$$

2π 内有 0 → N-1 个冲激。

$$X_p(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \quad (a_k = \frac{1}{N} \sim p[n])$$

$$\therefore X_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(e^{j(\omega + k\omega_s)})$$

∴ 频域上表现为原周期频谱 $X(e^{j\omega})$ 以 ω_s 为间隔

向右搬 (左移), 延拓 $N-1$ 次, 幅度加权 $\frac{1}{N}$ 。

由于 $\omega_s = \frac{2\pi}{N}$ 即 $2\pi = N\omega_s$ 那就说明 2π 长度

内可以放 N 个频谱。前提 $\omega_s > 2\omega_m$ 即 $2\pi > 2N\omega_m$

注: 连续时间采样后用冲激串转为序列以 $\delta[n]$ 代表

$\omega_s \text{ rad/s}$ 但此处不代表啦!

2. 与连续时间类似, 利用幅度为 N , $\omega_c = \frac{\omega_s}{2}$ 的理想

滤波器可将原信号恢复出来, 时域上表现为从 $h[n]$

带限内插。

$$X_r[n] = X_p[n] * h[n] \quad h[n] = N \cdot \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$$

$$= \frac{N\omega_c}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n}$$

$$\omega_c = \frac{\omega_s}{2}$$

$$X_r[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_p[kN] \cdot \frac{N\omega_c}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega_c (n-kN)}{\omega_c (n-kN)}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[kN] \cdot \frac{N\omega_c}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega_c (n-kN)}{\omega_c (n-kN)}$$

当 $\omega_c = \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{N}$ 时, 有 $X_r[kN] = X[kN]$

八. 离散序列的抽取与内插 (减采样, 增采样)

八. 抽取: 对原序列每隔 N 抽取, 并依次无间隔排列。

注: 采样序列两个样值有 $N-1$ 个空值, 而抽取序列无

即: $X_d[n] = X_p[nN]$, 那即 $X_d[n] = X[nN]$

分析: $X_d(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_d[kN] e^{-j\omega k}$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_p[kN] e^{-j\omega k}$$

换元 $n = kN$

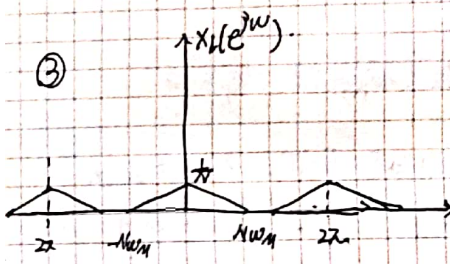
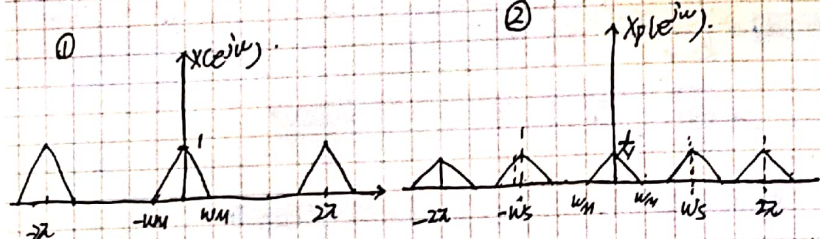
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_p[n] e^{-j\omega n/N}$$

$$= X_p(e^{j\omega/N})$$

注: 注意到 $X_d[n]$ 为 $X_p[n]$ 时域上的尺度压缩, 频域上则扩展, 又对傅里变换性质对应。

2. 若原序列是以 ω_s 对 $x(t)$ 采样得到, 那么抽取的过程可视为在连续时间上以 ω_s 对 $x(t)$ 采样得到的结果 (注意不是对 $X[n]$ 采样, 因为采样率下降不会引入 0 值)。

那么在频域上, $X(e^{j\omega})$ 对应于 ω_c , 而 $X_c(e^{j\omega})$ 中的 $\omega = 2\pi$ 对应于 $\frac{\omega_c}{N}$ (真实频率)。所以将两者比较 $X_c(e^{j\omega})$ 的带宽显得更宽, 为 $\omega_{Nc} = N\omega_c$ 。



①-② 为采样引入了幅度因子 N
 ②-③ 为抽取 仅在频率轴出现尺度变化

注: 对于任意序列进行抽取的结果: 对其相同间隔采样序列的频谱扩展 N 倍。

∴ 抽取过程 称之为 减采样。

2. 内插: 抽取的逆过程 ③ → ②

对一个序列在其两样值之间插入 $(N-1)$ 个 0 值, 相反得到的新序列 频谱 缩减 N 倍。

$X_c[n]$ 内插 0 值 $X_p[n]$ 重构 $X_c[n]$ 重构 $X_c(t)$

这样一个低采样率序列经过补偿得到一个高采样率序列 $X_c[n]$ 。

问: 若 $X_c[n]$ 不能复原 $X_c(t)$, 补偿增加采样率得到 $X_c[n]$ 就能复原 $X_c(t)$ 了?

对应采样序列频谱

答: ① 对 $X_c[n]$ 来说 $X_c[n]$ 为其抽取信号, 为 N 步尺寸打张 N 倍形成。① 若 $X_c[n]$ 带宽为 ω_c , 则 $X_p[n]$ 带宽为 $N\omega_c$ 。若 $N\omega_c < \pi$ 则不会产生混叠, 那么此时又对 $X_p[n]$ 内插, 使其频率由压缩 N 倍 则可以得到 $X_c[n]$ 再进一步得到 $X_c(t)$ 。

也即 $X_p[n]$ 不需冗余的时间补采样定理

② 若 $N\omega_c > \pi$, 则又对 $X_c[n]$ 进行 N 的抽取 则得到的信号频谱为 $X_c(e^{j\omega})$ 的混叠, 若此时再进行增采样 恢复出来的 $X_p[n] \neq X_c[n]$, 则 $X_p[n]$ 得到的 $X_p(t) \neq X_c(t)$ 。

结论: $X_c[n]$ 为 $X_c(t)$ 的采样序列, 复可以恢复出 $X_c(t)$ 。

$X_c[n]$ 为 $X_c[n]$ 的抽取, 也是 $X_c(t)$ 的 N 的采样序列。

若要 $X_c[n]$ 能恢复出 $X_c(t)$, 也即是 $X_c[n]$ 可恢复出 $X_c[n]$ 则要求 $\frac{\omega_c}{N}$ 满足对 $X_c[n]$ 的采样定理。

或者 $X_c[n]$ 对应的 $X_p[n]$ 对 $X_c[n]$ 的采样满足采样定理。即降采样对应采样频率仍 $> 2\omega_{Nc}$ (满足采样定理)。

注: ① 对 $X_c[n]$ 先采样得到采样序列 $X_p[n]$, 再对 $X_p[n]$ 进行

抽取: 有: $X_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_c(e^{j(\omega - k\omega_c)})$
 $X_c(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_p(e^{j(\omega - k\omega_c)})$ *

② 对 $X_c[n]$ 直接抽取得到 $X_p[n]$

有: $X_p(e^{j\omega}) = X_c(e^{j\omega}) = X_p(e^{j\omega})$

$X_c(e^{j\omega}) = X_p(e^{j\omega/N})$ **

两种方法得到的序列一致那它的谱也一致 即 $X_c(e^{j\omega}) = X_p(e^{j\omega})$ (D)

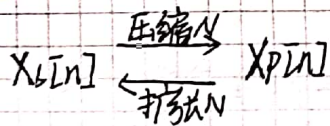
只是把图移上着在差5幅度N

注: 对一个信号序列进行抽取, 则相应于频谱上的变化为, $X(e^{j\omega})$ 以 $\frac{2\pi}{N}$ 左右移位, 加权为再在频域上扩展 N 倍. 若 $x_c[n]$ 为 $x(t)$ 以 $\frac{1}{N}$ 的采样序列, 那么 $X_c(e^{j\omega})$ 为 $X(e^{j\omega})$ 以 $\frac{\omega_s}{N}$ 的采样序列.

问: 对 $x_c[n]$ 进行抽取, 其结果?

由上述注可知, 先对 $x_c[n]$ 采样, 频谱复制 N 次, 混叠 N 次, 加权幅度为 $\frac{1}{N}$, 正好频谱不变, 再将其频轴扩张 N 倍. 所以我们发现类似于抽样信号序列的一类的特定间隔抽取, 只要频域扩张. 而对于一般信号如上述注. 不要再扣了!!!

内插: 对 $x_c[n]$ 插 N-1 个 0 值得到 $x_p[n]$, 此为对 $x_c[n]$ 抽取逆过程, 因此由 $x_c[n] \rightarrow x_p[n]$ 频谱频域压缩 N 倍.



注: 信号带宽: 最高频 (正) - 最低频 (正).

附: 频域采样.

$$F(\omega) \leftrightarrow f(t)$$

$$F_s(\omega) = F(\omega) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) \quad \text{采样间隔 } \omega_s$$

$$\text{又 } \frac{1}{\omega_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \xrightarrow{F_t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

$$\therefore f_s(t) = f(t) * \left(\frac{1}{\omega_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \right) = \frac{1}{\omega_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - nT_s)$$

理解: $f(t)$ 频谱被间隔为 ω_s 的冲激序列在频域抽样, 则时域上表现为 $f(t)$ 以 $T_s = \frac{2\pi}{\omega_s}$ 周期延拓, 并且加权系数为 $\frac{1}{\omega_s}$ (采样间隔倒数).

频域抽样定理: 对于时限信号, $-t_m \sim t_m$, 当 t_m 小于 $\frac{1}{2\omega_s}$ 频率间隔对 $F(\omega)$ 抽样才能不混叠.

$$\dots \cdot T_s - t_m > t_m \quad T_s > 2t_m \quad \frac{2\pi}{\omega_s} > 2t_m$$

$$\omega_s < \frac{2\pi}{2t_m} \quad f_s < \frac{1}{2t_m}$$

Chapter 9 拉普拉斯变换

一、定义(双边)

一个信号的拉普拉斯变换可以视为这个信号加指数信号的傅里叶变换。

乘以指数信号可以在一定范围内使其绝对可积,使其傅里叶变换存在(拉普拉斯变换)。

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad \text{其中 } s = \sigma + j\omega \quad *$$

当 $s = j\omega$ 时即 $\sigma = 0$ 时, $X(s)|_{\sigma=0} = X(j\omega)$, 其拉普拉斯变换转变为傅里叶变换。

观察 * 式可知要想 $X(s)$ 收敛对于 s 取值(复平面上)存在一定要求, 我们称满足要求的 s 值为其收敛域记作 ROC。

当 ROC 包括虚轴时信号傅里叶变换存在。

二、零极点图

只要信号 $x(t)$ 为实指数信号或复指数信号的线性组合, 其 $X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ 为有理式。利用 "o" 表示零点, "x" 表示极点。

一般来说拉普拉斯代数表示式其零极点个数相等(重根按重数计算)。当分母阶次高于分子阶次, 则 $X(s)$ 在无穷远处存在 k 阶零点, 当分子阶次高于分母阶次, 则 $X(s)$ 在无穷远处存在 k 阶极点。

二、收敛域及其特性

1. $X(s)$ 收敛域为平行于 $j\omega$ 轴的带状区域

$$\text{For: } \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| \cdot e^{-\sigma t} \cdot e^{j\omega t} dt \text{ 其是否收敛}$$

仅取决于实部 $e^{-\sigma t}$.

2. 对于有理拉氏变换, ROC 不包括极点...

For: 极点处 $X(s)$ 无穷大.

3. $X(t)$ 为时限信号, 且绝对可积, 其 ROC 为 S 平面.

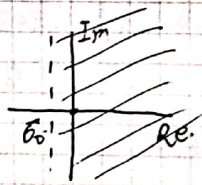
$$\text{证: 有 } \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| dt < \infty \Rightarrow \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| \cdot e^{-\sigma t} dt$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma > 0: \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < e^{-\sigma T_1} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| dt, \text{ 收敛} \\ \sigma < 0: \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < e^{-\sigma T_2} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| dt, \text{ 收敛} \end{array} \right.$$

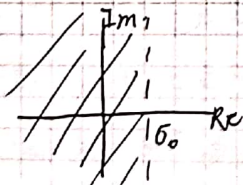
4. $x(t)$ 为右边信号, 其 ROC 为 $\sigma = \sigma_0$ 的右侧半平面。

5. $x(t)$ 为左边信号, 其 ROC 为 $\sigma = \sigma_0$ 的左侧半平面。

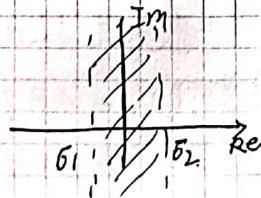
6. $x(t)$ 为双边信号, 其 ROC 为 (σ_1, σ_2) 的带状区域。



右边 ROC



左边



双边

7. 若 $x(t)$ 拉氏变换有理则: 右边信号的收敛域在最右侧极点右侧, 左边信号在最左侧极点左侧。

分析双边信号可将其拆分为左边、右边信号分别分析, 拆分的两个信号收敛域重合部分为双边信号收敛域。

三、拉普拉斯逆变换

1. 定义式: $x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_2 + j\infty} X(s) e^{st} ds$ (留数法、围线积分)

2. 部分分式展开法求逆变换:

① 将假分式用长除法化为真分式。

② 部分分式展开

单实根: 对应 $\frac{k_1}{s-p_1}$

R 重实根: 对应 $\frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_2}{(s-p_1)^2} + \dots + \frac{k_R}{(s-p_1)^R}$

二次因式 (共轭虚根): $\frac{Ax+B}{px^2+qx+r}$

③ 确定待定系数: $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$

$$\text{令 } F(s) \cdot (s-p_i) \Big|_{s=p_i} = \frac{N(s)}{D(s)} \cdot (s-p_i) \Big|_{s=p_i} \Rightarrow k_i$$

$F(s)$ 中将 $(s-p_i)$ 约去, 其他不含 $(s-p_i)$ 的项因 $s=p_i$ 而得 0, 而含有 $(s-p_i)$ 项留下分子即得所求系数。

④ 利用变换对求出时域表示式

$$\text{注: } \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2} \iff e^{-at} \sin \omega_0 t \cdot \epsilon(t) \quad \text{步进阶}$$

$$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2} \iff e^{-at} \cos \omega_0 t \cdot \epsilon(t)$$

四、双边拉氏变换性质

1. 线性性质: $aX(t) + bY(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} aX(s) + bY(s)$, ROC 包括 $R_1 \cap R_2$

若产生零极相消情况其收敛域会扩大, 否则为二者之交集

2. 时移性质: $X(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} e^{-st_0} X(s)$, ROC 不变

3. s域平移: $X(t) \cdot e^{s_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s-s_0)$, ROC = $R + \text{Re}\{s_0\}$

s 频谱平移 s_0 , 收敛域相应地移动 s_0

注: 其中 s_0 可为实数, 也可为复数, 因此零极点位置相应的在复平面上移动

4. 时域尺度变换: $X(at) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)$, ROC = $|a|R$

收敛域随频谱变化而相应地展成压缩

注: 若 $a < 0$ 则收敛域要反例置再加一个尺度变换

$$X(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(-s), \text{ROC} = -R$$

5. 共轭性质: $X^*(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X^*(s^*)$, ROC 不变

若 $X(t)$ 为实数: $X(s) = X^*(s^*)$

若某信号在 $s=s_0$ 存在一零/极点, 则 $s=s_0^*$ 处也存在

6. 卷积性质: $X_1(t) * X_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X_1(s) X_2(s)$, ROC 包括 $R_1 \cap R_2$

若产生 0 根相消其收敛域将扩大

7. 时域微分: $\frac{dX(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} sX(s)$, ROC 包括 R

若产生 0 根相消收敛域将扩大

8. s域微分: $-tX(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{dX(s)}{ds}$, ROC 不变

9. 时域积分: $\int_{-\infty}^t X(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} X(s)$, ROC 包括 $R \cap \{\sigma > 0\}$

10. s域积分: $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = \left(\frac{d}{ds}\right)^n F(s)$
注: $\int_{-\infty}^t X(\tau) d\tau = X(t) * U(t)$, $U(t) \rightarrow \frac{1}{s}, \sigma > 0$

11. 初值定理: $X(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot X(s)$

终值定理: $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot X(s)$

条件: 初值: $\left\{ \begin{array}{l} F(s) \text{ 要为真分式 (假分式要先化为真分式)} \\ f(t), \frac{df(t)}{dt} \text{ 拉氏变换存在} \\ f(t) \text{ 因果} \end{array} \right.$

终值: $\left\{ \begin{array}{l} f(\infty) \text{ 存在, } f(t), \frac{df(t)}{dt} \text{ 拉氏变换存在} \\ F(s) \text{ 在虚轴 (除原点) 及其右侧连续可导} \\ \text{原点处最级有一阶单极点} \end{array} \right.$

五、常用信号拉氏变换

1. $\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} 1$, ROC 全 s 2. $U(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}, \sigma > 0$
 $\delta(t-1) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} e^{-s}$, 全 s $-U(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s}, \sigma < 0$ } 频移

3. $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} U(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s^n}, \sigma > 0$ 4. $e^{-at} U(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-a}, \sigma > -a$
 $\frac{-t^{n-1}}{(n-1)!} U(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s^n}, \sigma < 0$ $e^{-at} U(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a}, \sigma < -a$

5. $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} U(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{(s-a)^n}, \sigma > -a$ 6. $U_n(t) = \frac{d^n U(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} s^n \frac{1}{s}, \text{全 } s$
 $\frac{-t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} U(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{(s+a)^n}, \sigma < -a$

$$7. \begin{cases} \cos \omega_0 t \cdot u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \sigma > 0 \\ \sin \omega_0 t \cdot u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, \sigma > 0 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} e^{-at} \cos \omega_0 t \cdot u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}, \sigma > -a \text{ 频移} \\ e^{-at} \sin \omega_0 t \cdot u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}, \sigma > -a \end{cases}$$

$\frac{1}{s+a} \sim \frac{1}{s-a}$ 对应频幅响应一致。

注：时域互相关，波形只差幅度因子的两个信号在各自 ROC 上有同一 S 变换：

$$X(t) \cdot u(t+a) \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_{-a}^{\infty} X(t) e^{-st} dt = X(t) \Big|_{-a}^{\infty} = -X(-a) \quad \text{一致}$$

$$-X(t) u(-t-a) \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_{-\infty}^{-a} X(t) e^{-st} dt = -X(t) \Big|_{-\infty}^{-a} = -X(-a)$$

大，拉氏变换的系统分析 \Rightarrow 稳定 $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt \leq M$

因果：1. 若系统具有有理的系统函数，则系统因果 \Leftrightarrow

ROC 为位于最右边极点的右半平面

同时对于任意因果系统，其系统函数为某个右半平面

稳定性：① 当且仅当系统函数 $H(s)$ 收敛域包含 $j\omega$ 轴，则

此 LTI 系统稳定。（全部极点位于左半平面）

假设判：② 虚轴上有二阶及以上极点，则系统 $h(t)$ 增幅振荡，不稳

③ 虚轴上有一阶极点，则 $h(t)$ 增幅振荡，临界稳定

趋于非零值
用 BIBO 此条件并非稳定

单边拉氏变换

$$1. X(s) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt$$

由于与双边拉氏变换积分下限的差异，单在 $t > 0$ 时相同时两个信号其双边拉氏变换不一致，单边拉氏变换一致。

∴ 可以将单边拉氏变换视为对信号加权 $u(t)$ 的双边变换。
右边信号单，双边拉氏变换一致。

2. 单边拉氏变换具：线性、频移、时域尺度变换、共轭，S 域微分与双边拉氏变换一致。

而：时域积分 $\int_0^t x(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} X(s)$; $\sigma > \sigma_0$

卷积：记 $\int_0^t f(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(1)}(0^-)}{s}$; $\sigma > \sigma_0$
互逆 $f^{(1)}(0^-) = \int_0^0 f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^0 f(\tau) d\tau$

几时域微分 $\frac{d}{dt} x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sX(s) - x(0^-)$

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^2 X(s) - s x(0^-) - x'(0^-)$$

时域卷积：当仅当 $x_1(t), x_2(t)$ 为因果信号满足

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - \sum_{m=0}^{n-1} s^{n-m-1} f^{(m)}(0^-)$$

$$\frac{d^3}{dt^3} x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^3 X(s) - s^2 x(0^-) - s x'(0^-) - x''(0^-)$$

S 变换电路分析

$C_1 \parallel C_2 \Rightarrow C = C_1 + C_2$

S 框图

C_1 串 $C_2 \Rightarrow C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$

S 变换分析微分方程

L_1 串 $L_2 \Rightarrow L = L_1 + L_2$

$L_1 \parallel L_2 \Rightarrow L = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2}$

八、拉氏变换求解微分方程

例: $y''(t) + 7y'(t) + 12y(t) = 2f'(t) + 3f(t)$ $t > 0$

初始条件: $y(0) = 1, y'(0) = 2$

两边拉氏变换(单边):

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 7(sY(s) - y(0)) + 12Y(s) = 2F(s) \cdot s + 3F(s)$$

$$(s^2 + 7s + 12)Y(s) = (2s + 3)F(s) + (s + 7) + 2$$

$$Y(s) = \frac{2s + 3}{s^2 + 7s + 12} F(s) + \frac{s + 9}{s^2 + 7s + 12}$$

0 状态 0 输入

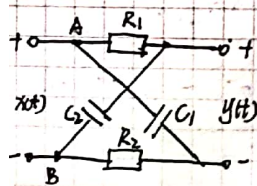
$$H(s) = \frac{2s + 3}{s^2 + 7s + 12}$$

重输入线性

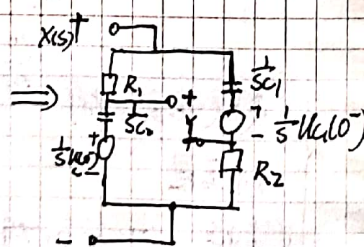
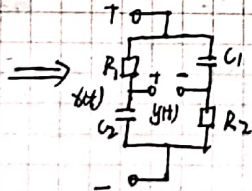
0 状态线性

[19.9] ①求 $H(s)$ 画 0 极图 ②为一全通网络, 元件参数应满足?

③若 $R_1 = R_2 = 1\Omega, C_1 = C_2 = 1F, x(t) = 10\sin t \cdot u(t)$ 求 0 状态响应



选 B 处为 0 极点



$$Y(s) = \frac{1}{sC_2} \cdot X(s) - \frac{R_2}{\frac{1}{sC_1} + R_2} X(s) \quad (\text{初始条件})$$

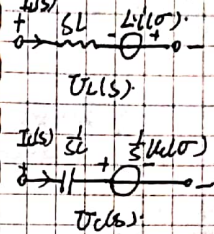
$$H(s) = \frac{1}{sC_2} - \frac{R_2}{\frac{1}{sC_1} + R_2}$$

九、S 变换的电路分析

1. 时域特性:
$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad / \quad i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(\tau) d\tau + i_L(0^-)$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau + u_C(0^-) \quad / \quad i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

2. 时域模型

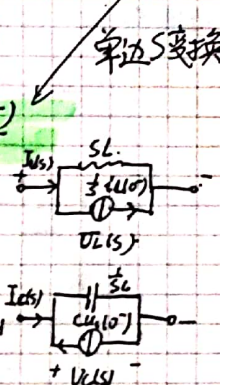


$$U_L(s) = sL I_L(s) - L i_L(0^-)$$

$$U_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) + \frac{u_C(0^-)}{s}$$

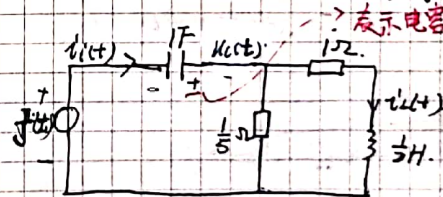
$$I_C(s) = sC U_C(s) - C u_C(0^-)$$

$$I_L(s) = \frac{1}{sL} U_L(s) + \frac{i_L(0^-)}{s}$$

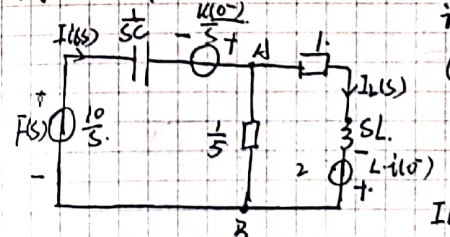


复阻抗: $L \Rightarrow sL \quad C \Rightarrow \frac{1}{sC}$

例: $U_C(0^-) = 5V, i_L(0^-) = 4A, f(t) = 6t \cdot 10$ 求 $i_L(t)$



①画等效运算电路



②列方程:

设 $U_B(s) = 0$
 $(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \frac{1}{s+1}) U_A(s) = \frac{10}{s} + \frac{5}{s} \frac{1}{5}$

$$U_A(s) = \frac{15s + 26}{s^2 + 7s + 12}$$

$$I_L(s) = \frac{U_A(s) + 2}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{4s + 50}{s^2 + 7s + 12}$$

$$= \frac{38}{s+3} - \frac{34}{s+4} \Rightarrow i_L(t) = 38e^{-3t}u(t) - 34e^{-4t}u(t)$$

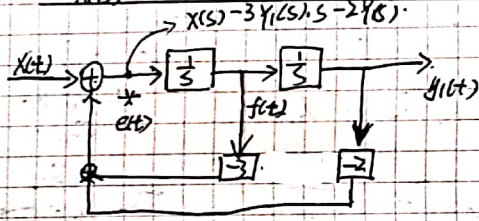
→ 有限因果系统
 十、系统函数的模拟 → 框图

[例本. 9.36] 确定 $H(s) = \frac{2s^2+4s-6}{s^2+3s+2}$ 的框图, 直接型, 级联型,

并联型。

(1) 直接型 ① 先确定 $H(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}$ 的框图。

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2+3s+2} \quad \therefore X(s) = (s^2+3s+2)Y(s) \Rightarrow Y(s) \cdot s^2 = X(s) - 3sY(s) - 2Y(s)$$



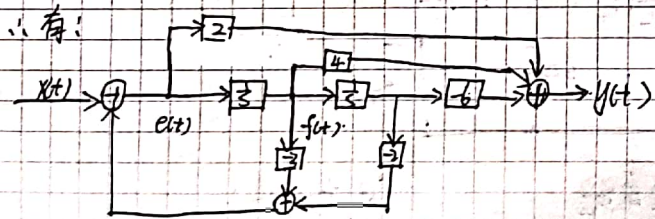
(图一)

分析: 从右往左看, 最上路
 相当于 $Y(s) \cdot s^2$, 支路1为 $-3Y(s)$
 支路2, 为 $-2Y(s)$ 。
 \therefore 此处为 $X(s) - 3Y(s) - 2Y(s)$ 。
 也即 $X(s) \cdot s^2$ 相等

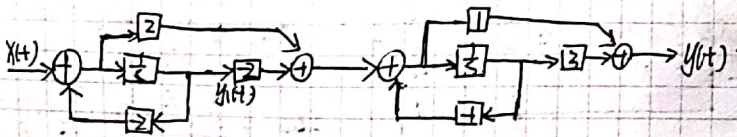
$$\textcircled{2} H(s) = H_1(s) [2s^2+4s-6] = \frac{Y_1(s)}{X(s)} [2s^2+4s-6] = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$\therefore Y_1(s) = [2s^2+4s-6] \cdot Y(s)$$

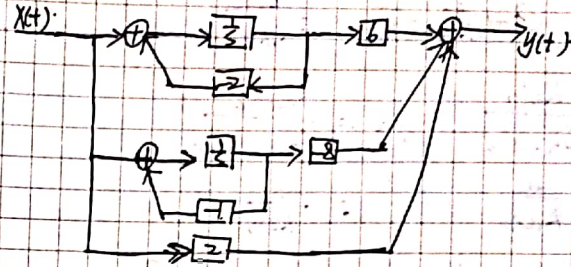
$$y_1(t) = 2y_1''(t) + 4y_1'(t) - 6y_1(t) = 2e^{2t} + 4f(t) - 6y_1(t)$$



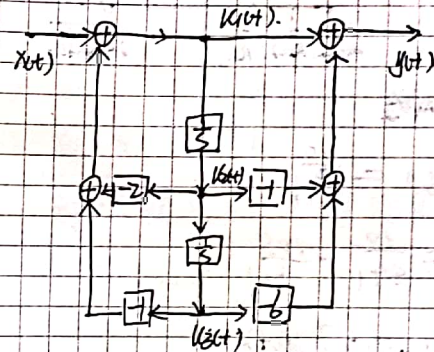
(2) 级联型: $H(s) = \left(\frac{2s+1}{s+2}\right) \left(\frac{s+3}{s+1}\right)$



(3) 并联型. $H(s) = 2 + \frac{6}{s+2} - \frac{8}{s+1}$



[例本. 9.35] 根据系统框图确定常微分方程:



$$Y(s) = U_1(s) + [-U_2(s) - 6U_3(s)]$$

$$\begin{cases} U_1(s) = X(s) + (-2)U_2(s) - U_3(s) \\ U_2(s) = \frac{1}{s} U_1(s) \\ U_3(s) = \frac{1}{s^2} U_1(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y(s) = U_1(s) \left[1 - \frac{1}{s} - 6\frac{1}{s^2} \right]$$

$$U_1(s) = X(s) / \left[1 + \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} \right]$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1 - \frac{1}{s} - 6\frac{1}{s^2}}{1 + \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}} X(s) \Rightarrow H(s) = \frac{s^2 - s - 6}{s^2 + 2s + 1}$$

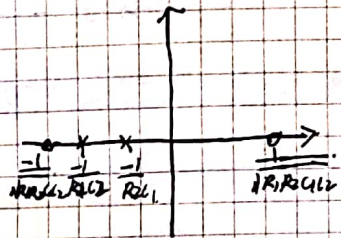
$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = x''(t) - x'(t) - 6x(t)$$

注: 若由 $H(s)$ 画框图时按最开始的开式画, 即使出现 0 极相消, 阶次降低的情况。

[接 19.9] $H(s) = \frac{-(s^2 - \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2})}{s^2 + (\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2})s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$

极点: $P_1 = \frac{-R_2 C_1}{R_1 R_2 C_1 C_2}, P_2 = \frac{-R_1 C_2}{R_1 R_2 C_1 C_2}$
 $= \frac{-1}{R_1 C_2} = \frac{-1}{R_2 C_1}$

零点: $Z_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$



(2) 当 $\frac{1}{R_1 C_1} = \frac{1}{R_2 C_2}$ 时系统为全通网络

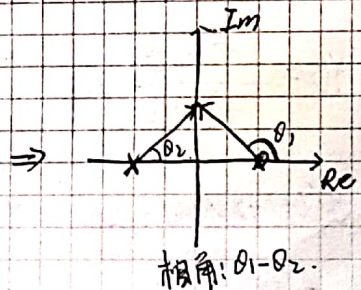
(3) $H(s) = -\frac{s-1}{s+1} \quad X(s) = \frac{10}{s^2+1}$
 $Y(s) = \frac{1-s}{s+1} \cdot \frac{10}{s^2+1} = \frac{10}{s+1} - \frac{10s}{s^2+1}$
 $y(t) = [10e^{-t} - 10\cos t] u(t)$

★ (2) $\frac{1}{R_1 C_1} = \frac{1}{R_2 C_2}$ 时 (产生30°极相消, $s = \frac{1}{R_1 C_1}$ 的0极点抵消)

极点: 一阶 $P = \frac{1}{R_1 C_1} = \frac{1}{R_2 C_2}$

零点: $S = -\frac{1}{R_1 C_2} = 0$

一阶: $S = \frac{1}{R_1 C_2}$



对于任意 ω 其极点向量与0点向量模值相等

$\therefore |H(j\omega)| = 1$ 为一全通网络

注: 全通系统: 幅频特性为常数与频率无关

\therefore 分析全通系统 0-极点并其点, 极点应关于 $\pm j\omega$ 轴对称分布。因此其相位为 0 点向量相角减极点向量相角。
 \rightarrow (极点位于 $j\omega$ 轴, 零点位于 $-j\omega$ 轴)

[大] 某连续时间 LTI 系统输出为 $y(t) = e^{-3t} u(t)$ 系统输入

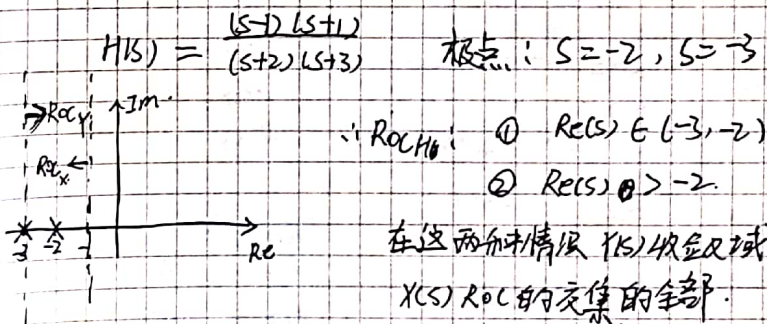
信号的拉氏变换为 $X(s) = \frac{s+2}{(s-1)(s+1)}$, 在以下条件下写出系统函数

$H(s)$, 画出零极点图, 并标注收敛域。

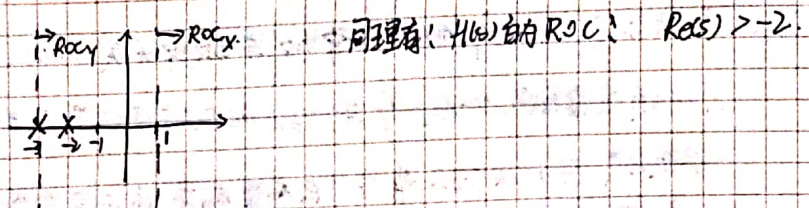
- (1) $x(t) = 0, t > 0$
- (2) $x(t) = 0, t < 0$
- (3) $x(t)$ 为双边信号

解: 分析: 输出为右边信号 则其 S 变换为右侧, 根据给出条件可知 $X(s)$ 的 ROC, $\therefore Y(s) = H(s) \cdot X(s) \therefore Y(s)$ ROC 要包含 $H(s), X(s)$ ROC 交集。

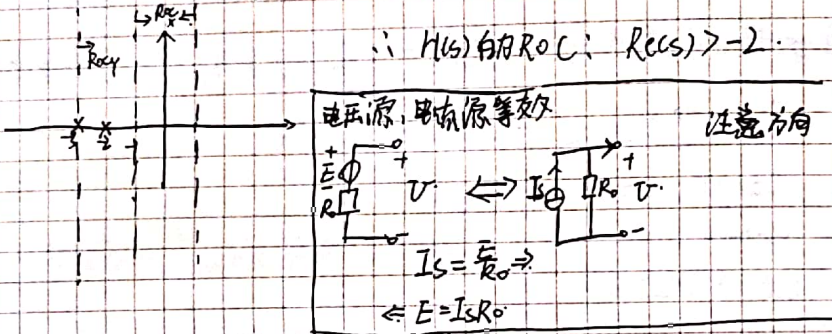
(1) $x(t)$ 为左边信号: $X(s) = \frac{s+2}{(s-1)(s+1)} \therefore \text{ROC: } \text{Re}(s) < -1$
 $Y(s) = \frac{1}{s+3} \quad \text{ROC: } s > -3$



(2) $x(t)$ 为右边: $\text{ROC: } \text{Re}(s) > 1$

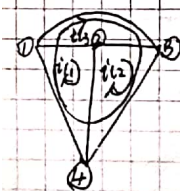
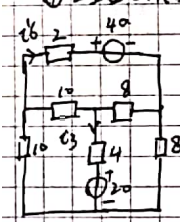


B) $X(s)$ 为双边信号 \Rightarrow ROC: $\text{Re}(s) \in (-1, 1)$



注: 求解电路节点电压法与回路电流法

- ① 回路电流法: 1. 选择回路 (保证每个回路有假连电流)
2. 每个回路自电阻: 回路中所有电阻和
- 互电阻: 两个回路公共电阻, 电流方向相反取负)
3. 回路电压 U_{kk} (代数代和), 电压源回路中电压源电压之和 (与电流方向一致取负, 正极在左电路 \rightarrow 负极在右电路 \rightarrow 正极在左)。
4. 解方程, 解方程



$$\begin{aligned}
 R_{11} &= 10 + 10 + 4 = 24 & U_{S11} &= 20 \\
 R_{22} &= 4 + 8 + 8 = 20 & U_{S22} &= 20 \\
 R_{33} &= 10 + 2 + 8 = 20 & U_{S33} &= -40 \\
 R_{12} &= -4 = R_{21} \\
 R_{13} &= 10 = R_{31} \\
 R_{23} &= 8 = R_{32} \\
 24i_1 - 4i_2 + 10i_3 &= -20 \\
 -4i_1 + 20i_2 + 8i_3 &= 20 \\
 10i_1 + 8i_2 + 20i_3 &= -40 \\
 i_1 &= 1.13 \\
 i_2 &= 2.68 \\
 i_3 &= -3.64 \\
 i_3 &= i_1 - i_2 = -1.55 \\
 i_6 &= i_3 = -3.64
 \end{aligned}$$

- ② 节点电压: 1. 选 0 电势点, 求其他节点列方程
2. 给节点自由编号: 连接列各独立节点, 支路总电阻等效再相加。
- 互导 (总导), 两个节点之间支路电导之和
3. U_{SK} : 流入节点电流 或 流出节点电流
4. 列方程, 解方程

注: 最小相移系统: 传递函数极点全部小于 0。

注: 响应: ① 根据经典法求解微分方程

自由响应: 微分方程齐次解

受迫响应: 特解

由常微分方程理论: ① 齐次解形式由特征根决定, 系数受激励后力信号影响; 初始状态影响 ② 受迫响应完全由输入决定。

$$y(t) = y_{2i}(t) + y_{2s}(t) = \underbrace{\sum_{k=1}^n A_{2ik} e^{\alpha_k t}}_{0 \text{ 输入}} + \underbrace{\sum_{k=1}^n A_{2sk} e^{\alpha_k t} + B^*(t)}_{0 \text{ 状态}}$$

自由 = 0 输入 + 初始状态

仅依赖于系统本身

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^n A_{2ik} e^{\alpha_k t}}_{\text{自由}} + \underbrace{B^*(t)}_{\text{强迫}}$$

全输入受迫

输入信号极点, 对应顶反

暂态响应: $t \uparrow$ 时逐渐消失
 稳态响应: $t \uparrow$ 时趋于稳定

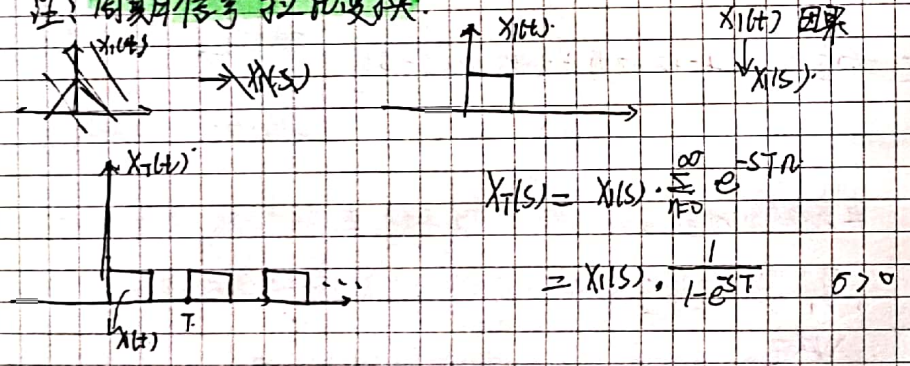
注: 当系统稳定, 极点位于左半面, 激励为 $E(s)$ 实部 > 0
 则自由响应即为暂态响应, 强迫响应即为稳态响应。

$\frac{1}{s+a} \rightarrow e^{-at} u(t)$, $t \uparrow$ 时 $\rightarrow 0$

$\frac{1}{s-a} \rightarrow a^{at} u(t)$, $t \uparrow$ 时 $\rightarrow \infty$, $\frac{1}{s^2+1} \rightarrow \sin t \cdot u(t)$
 等幅振荡

当 system 不稳定 自由响应 \rightarrow 稳态
 e^{at} 衰减 受迫响应 \rightarrow 暂态

注: 周期信号拉氏变换



Chapter 10 Z变换

一、定义式及其收敛域 (双边)

1. $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n}$, $z = r \cdot e^{j\omega}$

$X(r \cdot e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot (r \cdot e^{j\omega})^{-n}$

注: Z变换可视为序列 $x[n]$ 加权实指数 r^n 的傅氏变换

当 $z = e^{j\omega}$ 即 $r=1$ 时 Z变换转为傅氏变换, 也即 Z平面上单位圆上的 Z变换。

2. ROC 及其性质

① $X(z)$ 的收敛域是在平面内以原点为中心的圆环。

For: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| \cdot r^{-n}$ 的收敛性取决于 $|n|$ 和 $|x[n]|$ 与 ω 无关。

② 收敛域内无极点。

③ 如果 $x[n]$ 为有限长序列, 那么收敛域为整个 Z 平面, 可能除去 $z=0$ 或 $z=\infty$ \Rightarrow depend on z^{n_1} , z^{n_2}

For: 有限项序列之和若和式中无无穷大项则和一定为有限值

$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] z^{-n}$

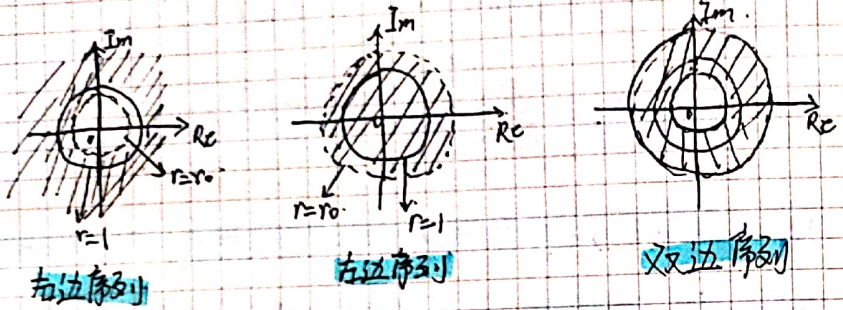
① 当 $N_1 < 0, N_2 > 0$ 时: $X(z)$ 存在 z^{n_1} , z^{n_2} 当 $z \rightarrow 0$ 时 $z^{n_2} = \infty$

$z \rightarrow 0$ 时 $z^{n_1} = \infty$, 所以 ROC 不含 $0, \infty$ 两点

② 当 $N_2 \leq 0$ 时, $x[n]$ 只有非正项, 当 $z \rightarrow \infty$ 时 $z^{n_1} = \infty$, ROC 不含 ∞

③ 当 $N_1 \geq 0$ 时, $x[n]$ 只有非负项, ROC 不含 0

- ④ $\left\{ \begin{array}{l} X(z) \text{ 为右边序列, 且 } |z|=r_0 \text{ 时 } X(z) \text{ 收敛: ROC 为 } r > r_0. \\ X(z) \text{ 为左边序列, 且 } |z|=r_0 \text{ 时 } X(z) \text{ 收敛: ROC 为 } r < r_0. \\ X(z) \text{ 为双边序列, } \dots \text{ ROC: 为包含 } r_0 \text{ 的圆环.} \end{array} \right.$



当 $X(z) \neq 0, N < 0$ 时
其 ROC 不含 $z=0$
 $X(z)$ 为因果序列 $z=0$

当 $X(z) \neq 0, N > 0$ 时
其 ROC 不含 $z=\infty$
 $X(z)$ 为反因果序列 $z=\infty$

二、 z 反变换.

1. 定义: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} dz$
2. 部分分式展开法: 其步骤类似拉氏反变换求法, 一般拆分为 $\frac{A_i}{1-a_i z^{-1}}$, 将 z^{-1} 视为一个整体, 利用变换对.

$$a^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-a z^{-1}}, \quad -a^n u[-n-1] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-a z^{-1}}$$

$|a| > 1 \qquad \qquad \qquad |a| < 1$

其中 a 可正可负.

3. 幂级数展开法: 由 $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$ 可知, 若将 $X(z)$ 展开成幂级数, 则其系数即为 $x[n]$.
- ↓
长除法

如: ① $X(z) = \frac{1}{1-a z^{-1}}, |z| > a$.

由: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, |x| < 1$ 可知.

$$X(z) = \frac{1}{1-a z^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (a z^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$$

$\therefore x[n] = a^n \cdot u[n]$

② $X(z) = \frac{1}{1-a z^{-1}}, |z| < a$.

由 $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 可知.

$$\frac{1}{1-x} = \frac{x^{-1}}{1-x^{-1}} = \frac{-x^{-1}}{1-x^{-1}} = -x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (x^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} -x^{-(n+1)}$$

$\therefore X(z) = \frac{1}{1-a z^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} -(a z^{-1})^{-(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} -a^{-(n+1)} \cdot z^{n+1}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} -a^{-n} \cdot z^n \xrightarrow{m=n-1} \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^{-n} \cdot z^{-n}$$

$\therefore x[n] = -a^n \cdot u[-n-1]$

③ $X(z) = \ln(1+a z^{-1}), |z| > |a|$.

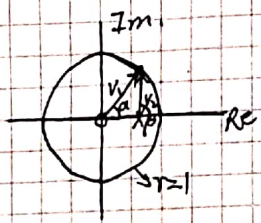
由 $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, -1 < x \leq 1$

$$\therefore X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (a z^{-1})^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot a^n \cdot z^{-n}$$

$\therefore x[n] = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot a^n \cdot u[n-1]$

三、利用零极点图几何法分析信号频响特性.

① 1阶 (一个点, 极点): $H(z) = \frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-az^{-1}}$, $|z| > |a|$.



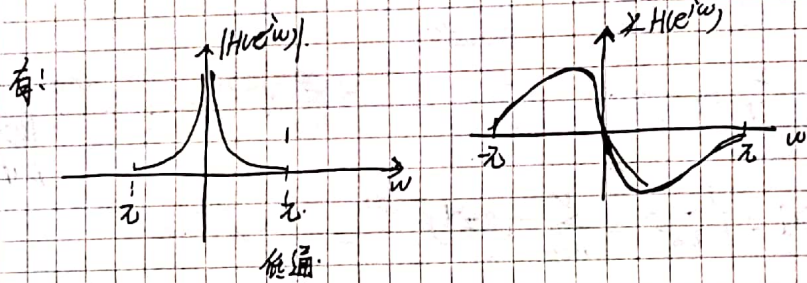
$|H(e^{j\omega})| = \frac{|V|}{|V|}$, 单位圆上 $|V| = 1$

$\therefore |H(e^{j\omega})| = \frac{1}{|a|}$, $\angle H(e^{j\omega}) = \alpha - \beta$

当 $|\omega|$ 小时 $|a|$ 单增

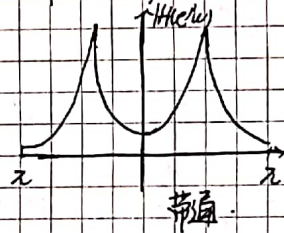
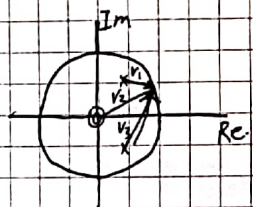
$\omega \in (0, \pi)$ 时: $\beta > \alpha$

$(\pi, 0)$ 时: $\alpha > \beta$ $|\beta| > |\alpha|$



② 二阶至多阶

分析方法: $|H(e^{j\omega})|$ 为 0 点向量模值的乘积比上极点向量乘积。
二阶极点则乘两次。



注: 若判定 Z^{-1} 分式形式的 0, 极点, 对于 $z=0$ 处, $z=\infty$ 处存在
疑虑, 可将其化为 Z 的分式形式判定。

注: 用 $H(z)$ 求 $H(e^{j\omega})$ 幅度谱, + 相位谱。

$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})^* = H(e^{j\omega}) H(e^{-j\omega})$

$= H(z) \cdot H(z^{-1}) \Big|_{z=e^{j\omega}}$

$\Big|_{\frac{Im}{Re}} = \frac{H(z) - H(z^{-1})}{H(z) + H(z^{-1})} \Big|_{z=e^{j\omega}}$

for: $H(z) = \frac{a-jb}{a+jb}$
 $H(z) = \frac{a+jb}{a-jb}$
 $Re^{j\omega}$

四、Z变换性质

1. 线性性质: $aX_1[n] + bX_2[n] \xrightarrow{Z} aX_1(z) + bX_2(z)$, ROC 包括 $R_1 \cap R_2$

注: 若产生 0 极相消则收敛域可能扩大。

2. 时移性质: $X[n-n_0] \xrightarrow{Z} z^{-n_0} X(z)$, ROC = R, 0/ ∞ 可能改变

注: z^{-n_0} 引入可能改变 $z=0/z=\infty$ 处的 0 极点。

3. Z域尺度变换: $z_0^n X[n] \xrightarrow{Z} X(\frac{z}{z_0})$, ROC = $|z|/R$

注: 当 z_0 为复指数: $e^{j\omega_0 n} X[n] \xrightarrow{Z} X(e^{-j\omega_0} z)$ \rightarrow 对应于频率轴 (DTFT)

Z 变换在 Z 平面内旋转 $n\omega_0$

4. 时间反转: $X[-n] \xrightarrow{Z} X(\frac{1}{z})$, ROC = $\frac{1}{R}$

5. 时间扩展 (内插): $X_w[n] = \begin{cases} X(n/k), & n/k \text{ 取整} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

$X_w[n] \xrightarrow{Z} X(z^k)$, ROC = $R^{1/k}$ 时域扩展, Z 域压缩

6. 共轭: $X^*[n] \xrightarrow{Z} X^*(z^*)$, ROC = R

注: 实信号 0, 极点成共轭对。

7. 卷积性质: $X_1[n] * X_2[n] \xrightarrow{Z} X_1(z) \cdot X_2(z)$, ROC 包括 $R_1 \cap R_2$

$X_1(z) \cdot X_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} X_1[n] \cdot z^{-n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} X_2[k] \cdot z^{-k}$

$= \sum_{m=0}^{\infty} Y[m] \cdot z^{-m} \Rightarrow Y[n] = X_1[n] * X_2[n]$

当两个多项式或幂级数相乘时, 该多项式系数为 $X_1(z), X_2(z)$

系数的卷积, 即 $X_1[n] * X_2[n]$

8. Z域微分: $nX[n] \xleftrightarrow{Z} -z \frac{dX(z)}{dz}$, $ROC=R$

9. 初值定理: ①若 $n < 0$ 时, $X[n] = 0$ 也即 $X[n]$ 为因果信号, 则

$$X[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad \downarrow \text{初值项}$$

分析: 对于因果序列, 若 $X[0]$ 为有限值, 那么 $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ 也有限, 则易知因果序列 Z 变换分子阶次不能大于分母阶次...

②若 $X[n] > 0$ 时, $X[n] = 0$, 也即 $X[n]$ 为反因果信号, 则

$$X[0] = \lim_{z \rightarrow 0} X(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \left[\sum_{n=0}^{\infty} X[n] z^{-n} \right] = X[0]$$

注: 利用初值定理时要根据 ROC 来判断是因果还是反因果信号。

10. 终值定理: ①若 $X[n]$ 为因果序列, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X[n] = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)]$$

②若 $X[n]$ 为反因果序列, 则:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} X[n] = \lim_{z \rightarrow 1} [(z^{-1}-1)X(z)]$$

注: 证明详见上交 SS: P415-P416.

使用条件: 极点全位于单位圆内, 单位圆上仅允许 $z=1$ 有一阶极点 (因果序列) \Rightarrow 保证 $X(\infty)$ 存在

$$\frac{1}{(z-1)^2} \xrightarrow{Z} (n-1)u[n-2]$$

$$-z \left(\frac{1}{z-1} \right)' \xrightarrow{Z} n u[n-1]$$

$$\frac{1}{(z-1)^2}$$

五. 常用 Z 变换对 (双边)

1. $\delta[n] \xleftrightarrow{Z} 1$ 全部 Z

$$\delta[n+1] \xleftrightarrow{Z} z \quad \text{除 } z=0$$

2. $u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-z^{-1}}$, $|z| > 1$

$$-u[-n-1] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-z^{-1}}, |z| < 1$$

3. $a^n \cdot u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}}$, $|z| > |a|$

$$-a^n u[-n-1] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| < |a|$$

4. $n \cdot a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$, $|z| > |a|$ (步进阶阶)

$$-n \cdot a^n u[-n-1] \xleftrightarrow{Z} \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, |z| < |a|$$

5. $[\cos \omega n] \cdot u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1 - \cos \omega_0 z^{-1}}{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}$, $|z| > 1$

欧拉展开 + 三角恒等变换推导

$\cos \omega_0 n$
 $\cos \omega_0 n \leftrightarrow \frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2}$

$$[\sin \omega n] \cdot u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{[\sin \omega_0] z^{-1}}{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}, |z| > 1$$

六. 利用 Z 变换判定系统因果性、稳定性

1. 因果性: $h[n] = 0$ 当 $n < 0$ 时

对于一个 LTI 离散时间系统, 当且仅当其 $H(z)$ ROC 为一个圆的外部, 且 ROC 包含 ∞ , 则该系统因果。

↓ 也即

$H(z)$ 表示为多项式之比, 分母阶次不低于分子阶次

即: $\lim_{z \rightarrow \infty} H(z)$ 存在, 且 $\lim_{z \rightarrow \infty} H(z) = \infty$ 或 $H(z)$ 包含正幂项, $h[n] \neq 0$ $n < 0$

2. 稳定性: $|n|$ 绝对可和.

对于 LTI 离散时间系统, 当且仅当 $H(z)$ ROC 包含单位圆
则该系统稳定.

单边 Z 变换.

定义: $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$ (只含负幂项).

注: 可将单边 Z 变换视为 $x[n] \cdot \delta[n]$ 的双边 Z 变换.

所以说任一序列的单边 Z 变换收敛域总为某个圆的外侧

对于因果序列其双边单边 Z 变换表示式一致, 因此因果序列
其 Z 变换可利用前述变换对, 而非因果序列其反变换
求起来就'头大了'.

2. 单边 Z 变换性质.

线性、Z 域尺度、时间扩展、共轭、Z 域微分与双边 Z 变换

性质一样.

① 卷积性质: 条件 $x_1[n], x_2[n]$ 为因果序列

$$x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow X_1(z) \cdot X_2(z)$$

② 时间超前: $x[n+1] \xrightarrow{z} zX(z) - zX[0]$

时间延迟: $x[n-1] \xrightarrow{z} z^{-1}X(z) + X[-1]$

$$x[n-2] \xrightarrow{z} z^{-2}X(z) + z^{-1}X[-1] + X[-2]$$

推导: $x[n-1] \xrightarrow{z} X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n-1] \cdot z^{-n} = X[z^{-1}] + \sum_{n=1}^{\infty} x[n-1] z^{-n}$
 $= X[z^{-1}] + \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n-1} = X[z^{-1}] + z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$
 $= X[z^{-1}] + z^{-1} X(z)$

③ 一次差分: $x[n] - x[n-1] \xrightarrow{z} (1-z^{-1})X(z) - X[-1]$

④ 累加: $\sum_{k=0}^n x[k] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$

八、Z 变换与拉氏变换关系.

抽样信号: $x_s(t) = x(t) \delta_T(t)$ 的 S, Z 变换关系.

$$X_s(s) |_{e^{sT} = z} = X(z)$$

S 平面与 Z 平面映射关系.

$$s = \sigma + j\omega \quad z = r \cdot e^{j\theta}$$

$s = j\omega \rightarrow$ 单位圆

左半面 $\rightarrow |r| < 1$

右半面 $\rightarrow |r| > 1$

$$\begin{cases} z = e^{sT} \rightarrow \text{时间间隔}(T) \\ r = e^{\sigma T} = e^{\sigma T / \omega_s} \\ \theta = \omega T = \omega \cdot \frac{2\pi}{\omega_s} \end{cases}$$

平行于虚轴 \rightarrow 圆心为原点的圆 $s = \frac{1}{T} \ln z$

平行于实轴 \rightarrow 以原点为起始的射线

注: 这反变换两种方法异同(部分)

① 视 \$z\$ 为整体, 利用 \$a^n \cdot u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-az^{-1}}\$

$$\begin{aligned} \text{(左边)} \quad H(z) &= \frac{z}{(z-\frac{1}{5})(z-2)(z-3)} = \frac{\frac{4}{15}}{z-\frac{1}{5}} + \frac{-\frac{4}{3}}{z-2} + \frac{\frac{6}{5}}{z-3} \\ &= \frac{\frac{4}{15}z^{-1}}{1-\frac{1}{5}z^{-1}} - \frac{\frac{4}{3}z^{-1}}{1-2z^{-1}} + \frac{\frac{6}{5}z^{-1}}{1-3z^{-1}} \end{aligned}$$

$$h[n] = \frac{4}{15} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \cdot u[n-1] - \frac{4}{3} \cdot 2^{n-1} \cdot u[n-1] + \frac{6}{5} \cdot 3^{n-1} \cdot u[n-1]$$

② 视 \$z\$ 为整体, 利用 \$a^n \cdot u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{z}{z-a}\$

$$H(z) = \frac{4}{z-\frac{1}{5}} + \frac{-\frac{4}{3}}{z-2} + \frac{\frac{6}{5}}{z-3}$$

$$H(z) = \frac{4}{15} \cdot \frac{z}{z-\frac{1}{5}} + \frac{-\frac{4}{3} \cdot z}{z-2} + \frac{\frac{6}{5}z}{z-3}$$

$$h[n] = \frac{4}{15} \left(\frac{1}{5}\right)^n \cdot u[n] - \frac{4}{3} \cdot 2^n \cdot u[n] + \frac{6}{5} \cdot 3^n \cdot u[n]$$

两种变换结果等价, 形式不同.

注: 由 \$H(z)\$ 画结构框图要先 \$H(z)\$ 化为关于 \$z\$ 的有理式, 框图用 \$z^{-1}\$ 模拟.

注: 由框图求

注: 解给出初始状态为 \$y(0)=\alpha, y(1)=\beta\$ 的差分

方程: 利用^{法0}先将方程时移, 再利用单边 \$z\$ 变换, 的时间超前性质. 法①: 将 \$y(0)=\alpha, y(1)=\beta\$ 代入差分方程解得 \$y(1), y(2)\$ 再单边 \$z\$ 变换.

例: $y[n] + 4y[n-1] + 4y[n-2] = x[n] - x[n-1]$

$x[n] = u[n], y(0)=1, y(1)=2$

法①: $y[n+2] + 4y[n+1] + 4y[n] = x[n+2] - x[n+1]$

单 \$z\$: $z^2 Y(z) - z^2 y(0) - z y(1) + 4[z^2 Y(z) - z y(0)] + 4Y(z) = z^2 X(z) - z^2 x(0) - z x(1) - [z X(z) - z x(0)]$

$$Y(z) [z^2 + 4z + 4] = X(z) (z^2 - z) - z^2 - z + z + z^2 + 2z + 4z$$

$$Y(z) = \frac{z^2 - z}{z^2 + 4z + 4} + \frac{6z}{z^2 + 4z + 4}$$

$$= \frac{z^2 + 6z}{z^2 + 4z + 4}$$

\$\xrightarrow{\text{状态}}\$ $y[n] = (n+1)(-2)^n \cdot u[n] - 3n(-2)^n \cdot u[n]$

$$= (1-2n)(-2)^n \cdot u[n]$$

法②: $\begin{cases} y(0) + 4y(-1) + 4y(-2) = 1 \\ y(1) + 4y(0) + 4y(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(-1) = -\frac{3}{2} \\ y(-2) = \frac{3}{2} \end{cases}$

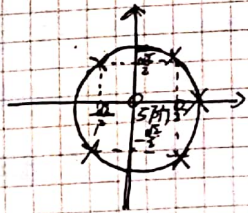
$$\therefore Y(z) [1 + 4z^{-1} + 4z^{-2}] + 4y(-1) + 4y(-1)z^{-1} + 4y(-2) = X(z)(1-z^{-1})$$

$$Y(z) = \frac{6z^{-1}}{(1+2z^{-1})^2} \rightarrow y_{z1}[n] = -3n(-2)^n \cdot u[n]$$

$$Y_{z2}(z) = \frac{z^{-1}}{(1+2z^{-1})^2} \rightarrow y_{z2}[n] = (n+1)(-2)^n \cdot u[n] \quad (10)$$

注: 周期信号变换

$$\frac{1}{(1-z^{-1})(1+z^{-1})} \quad 0, \text{极图?}$$

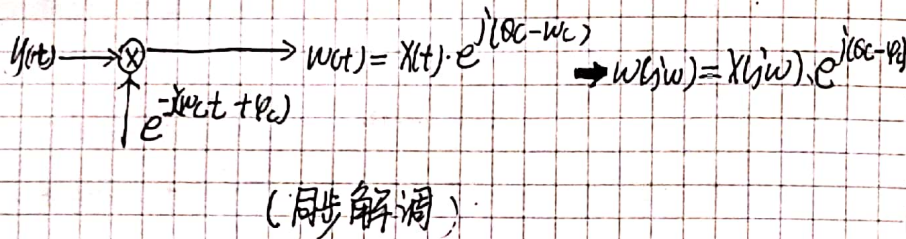
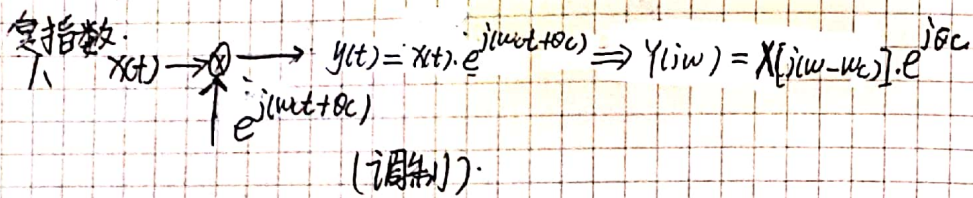


$$\left[\frac{z^{(2l-1)\pi/4}}{e^{-4}} \right]^4 = -1, \quad l=1, 2, 3, 4$$

推: $\left[e^{j\frac{(2l-1)\pi}{4}} \right]^N = -1$

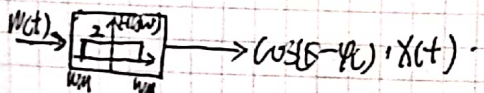
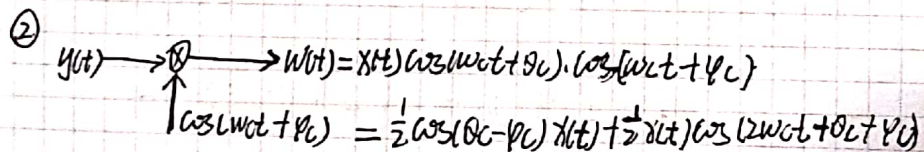
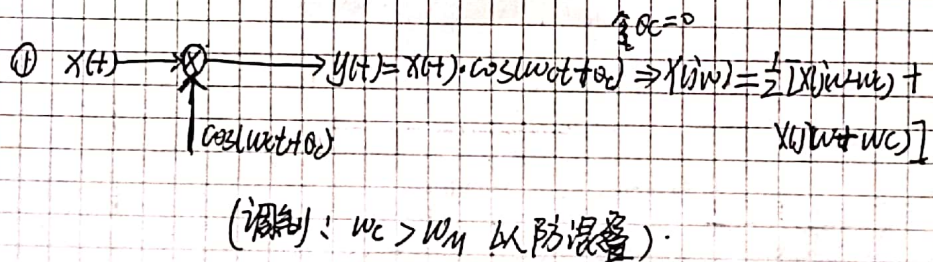
Chapter 8 通信系统

1. 复指数与正弦幅度调制与解调



注: 若调制用与解调用载波相位不同步, 则解调信号不存在一个复振幅因子。

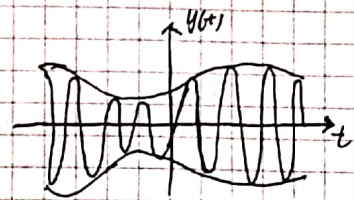
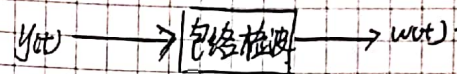
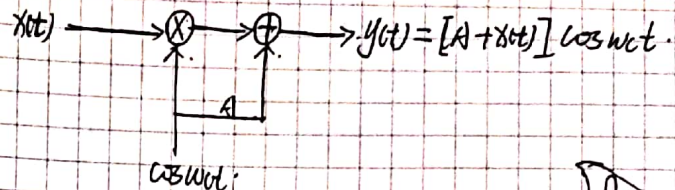
2. 正弦幅度调制



相位不同步引入幅度因子, 若 $\theta_c = \frac{\pi}{2}$ 则输出为 0.

(同步解调)

③ 非同步调制/解调系统 (包络检波)



注: 当载波频率远大于调制信号时, 已调信号的包络线能够近似表征调制信号 $x(t)$ 。但是由于包络幅度只能表征正值, 因此要保证调制信号为正, 可以通过在 $x(t)$ 中加入直流量 A , A 足够大。

调制指数: 设 $|x(t)| = K$, 则 K/A 称为调制指数。

若 $K/A = 100\%$ 则称为百分调制。

注: K/A 越大则引入不必要的直流量 A 就越小, 越经济, 但包络检波器提取 $x(t)$ 能力与 K/A 成反比。
(幅度越大, 检波能力越好)

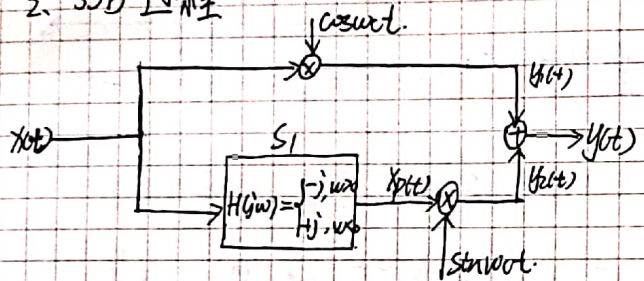
对比: 同步解调要求载波相位, 频率同步, 成本较高。

包络检波输出功率大, 耗能高, 不必要直流传输。

三、单边带正弦幅度调制 (SSB)

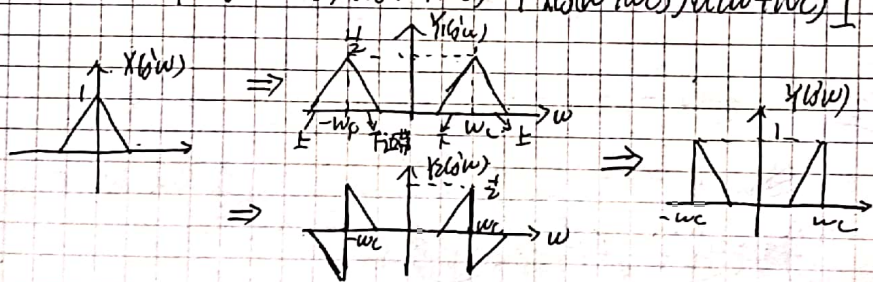
1. reason: 正弦幅度调制左右搬移后占用频带 $4\omega_m$, 其中有 $2\omega_m$ 冗余。(双边带 DSB)

2. SSB 过程



$$Y_L(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[-jX(j\omega) \cdot \omega(\omega) + X(j\omega) (\omega - \omega_c) \cdot j \right] \times \frac{\pi}{j} \left[\delta(\omega - \omega_c) - \delta(\omega + \omega_c) \right]$$

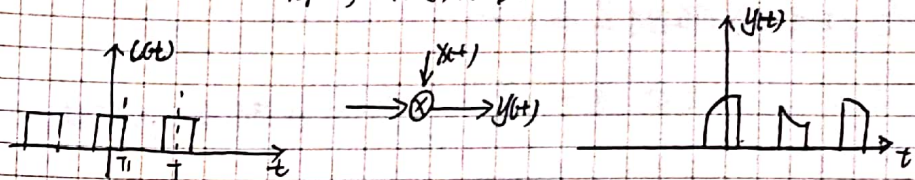
$$= \frac{1}{2} \left[-X(j(\omega - \omega_c)) \cdot \omega(\omega - \omega_c) - X(j(\omega + \omega_c)) \cdot \omega(\omega - \omega_c) + X(j(\omega - \omega_c)) \cdot \omega(\omega + \omega_c) + X(j(\omega + \omega_c)) \cdot \omega(\omega + \omega_c) \right]$$



注: 低频段为下边带, 高频段为上边带。

三、脉冲串载波调制与脉冲幅度调制

1. 利用 $x(t)$ 调制周期方波



时域上: 相当于在信道内等间隔传送 $x(t)$ 的时隙极样本。

$$x(t) \xrightarrow{f} Q(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \delta(\omega - k\omega_c)$$

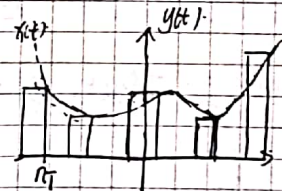
$$A_k = \frac{2k \sin(k\omega_c T)}{k\omega_c T}$$

$$\therefore Y(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k X(j\omega - k\omega_c)$$

即以 $x(j\omega)$ 搬移的加权 A_k 。

若 $\omega_c \geq \frac{2\pi}{T} > 2\omega_m$ 则可用滤波器得到 $x(t)$ 。

2. 采样保持。(用方波幅度表示一个 $x(t)$ 样本值)



其中 2 与 1 的差别为 2 在一个方波维持时隙内幅度不变。

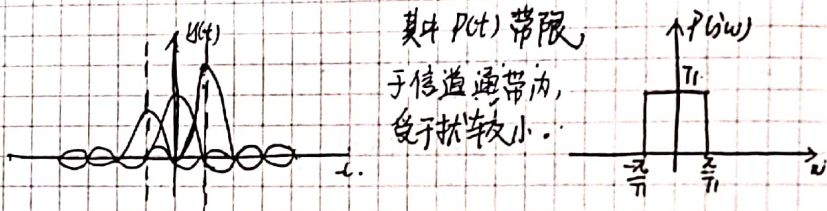
注: 即将持续期为 Δ 的, 幅度正比于 $x(t)$ 的脉冲传输出去, 接收端将所有脉冲收集后可滤波恢复。

3. 脉冲幅度调制的码间干扰

① 由于噪声使得脉冲波形变形, 相互之间叠加干扰, 接收端对信号采样时会读入错误。

② Solution: 使用 $p(t) = \frac{T_s \sin(\pi t / T_s)}{\pi t}$ 代替矩形脉冲。

要求在相应脉冲采样时刻, 其它脉冲值为 0。



四、复用: 频分, 时分。

频分复用: 对于信道带宽充足可以将不同信号放在不同频率范围内进行传输, 时域上表现为同时传输。接收端用不同频率选择滤波器接收即可。

时分复用: 在一个一般用于脉冲幅度调制系统中, 在一个信号两个相邻脉冲中间插入其他信号的脉冲, 接收端在不同时刻采样, 获得不同路信号。

五、正弦频率调制

1. 角调制 $\begin{cases} \text{相位调制} \\ \text{频率调制} \end{cases}$

载波: $c(t) = A \cos(\omega_c t + \theta_c)$
 $= A \cos \theta_c(t)$

2. 相位调制: 利用调制信号改变载波相位 θ_c 。

$$\theta_c(t) = \theta_0 + k_p x(t), \quad \theta(t) = \omega_c t + \theta_0 + k_p \int x(t) dt$$

$$y(t) = A \cos[\omega_c t + \theta_0 + k_p \int x(t) dt]$$

2. 频率调制: 利用调制信号改变载波, ... 相位的导数。

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_c + k_f x(t)$$

$$y(t) = A \cos(\omega_c t + \int k_f x(t) dt)$$

关系: $\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_c + k_f \frac{dx(t)}{dt}$

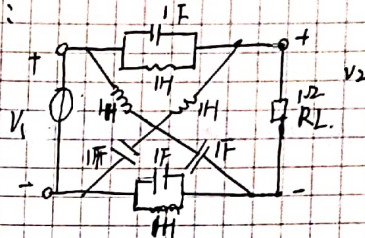
即用 $x(t)$ 进行相位调制等于用 $\frac{dx(t)}{dt}$ 进行频率调制

用 $x(t)$ 进行频率调制等于用 $\int x(t) dt$ 进行相位调制

注: 因为 $dx(t)/dt$ 与 $x(t)$ 处于同一量级; $\omega_c t = \Delta \theta$

戴维南等效解电路

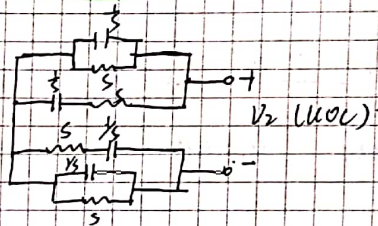
例:



求 $H(s)$, 零极点图。
是否是全通网络。

① 求 R_{eq} 为电路等效电阻 (串并联等效法)

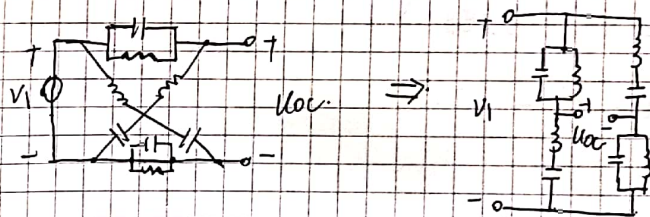
独立电压源短路, 独立电流源开路



$$R_{eq} = 2 \left[\frac{1}{\frac{1}{s} + s} \parallel (s + s) \right]$$

$$= \frac{2(s^2 + 1)s}{s^4 + 3s^2 + 1}$$

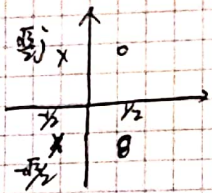
② 求开路电压 U_{oc}



$$U_{oc} = V_1 \frac{\frac{1}{s} + s}{\frac{1}{s} + s + \frac{1}{s} + s} - V_1 \frac{\frac{1}{s} + s}{\frac{1}{s} + s + \frac{1}{s} + s} = V_1 \frac{s^2 + 1}{s^4 + 3s^2 + 1}$$

$$\therefore H(s) = U_{oc} \cdot \frac{R_L}{R_{eq} + R_L}$$

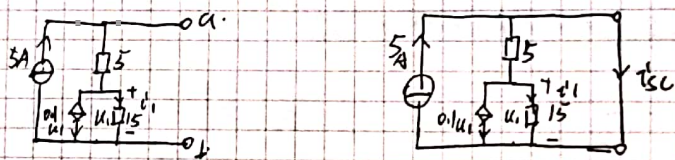
$$= \frac{s^2 - s + 1}{s^2 + s + 1}$$



是全通网络.

注: 若二端口内电路无受控源, 则用串并联等效法求 R_{eq} 就足够了. 有受控源:

① 开路电压、短路电流法.



$$\begin{cases} u_{oc} = 5 \times 5 + 15 \times i_1, & u_1 = 15 \times i_1 \\ i_1 = 5 - 0.1u_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_1 = 30V, \quad u_{oc} = 55V$$

$$i_{sc} = 5A \quad (\text{短路})$$

$$\therefore R_{eq} = \frac{55}{5} = 11\Omega$$

② 加压求流法.

将等效独立源断开.



$$u_s = 5V + 15i_1$$

$$u_1 = 15i_1$$

$$i_1 = i - 0.1u_1$$

$$i_1 = \frac{2}{5}i$$

$$u_s = 5V + 15i_1 = 11V$$

$$R_{eq} = \frac{u_s}{i} = 11\Omega$$

