# 实验十七：

（创新模块）状态空间理论、LQR控制器设计及仿真

# 实验目的：

1. 了解系统的状态空间描述方法；
2. 掌握LQR控制器设计原理；
3. 设计二级倒立摆系统LQR控制器。

# 实验任务/要求：

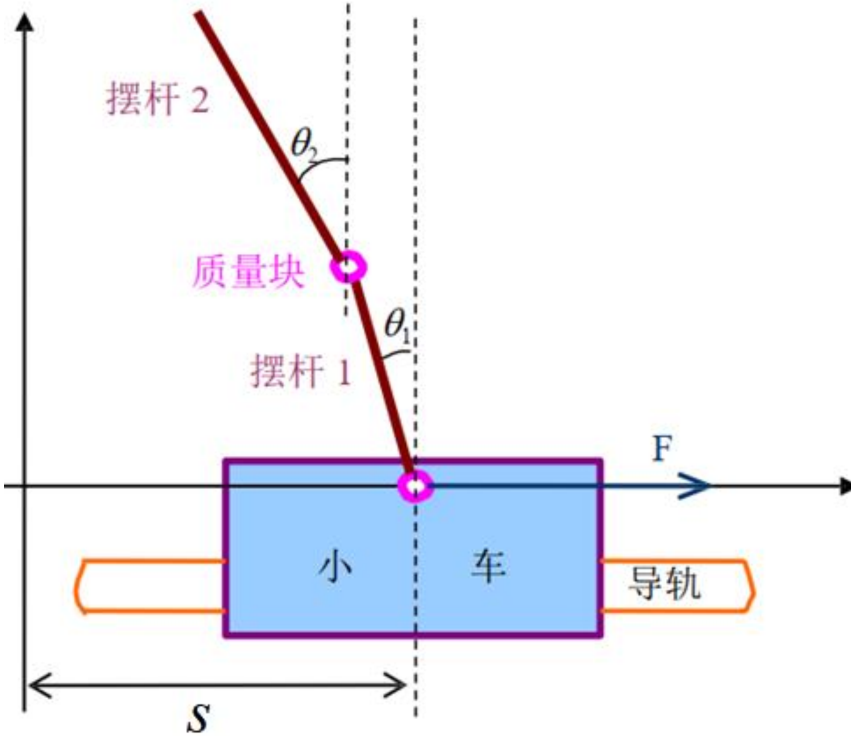
1. 基于LQR方法，设计二级倒立摆系统控制器；
2. 二级倒立摆系统LQR方法的仿真实现。

## 实验仪器、设备及材料：

二级倒立摆本体、倒立摆电控箱、PC机（Matlab平台、运动控制卡）

# 实验原理：

系统状态变量：$\{s,\theta_1,\theta_2,s',\theta_1',\theta_2'\}$，




$$\dot{x}=\begin{bmatrix} s' \\ \theta_1' \\ \theta_2' \\ s'' \\ \theta_1'' \\ \theta_2'' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 86.69 & -21.62 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -40.31 & 39.45 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ s' \\ \theta_1' \\ \theta_2' \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 6.64 \\ -0.088 \end{bmatrix}u$$

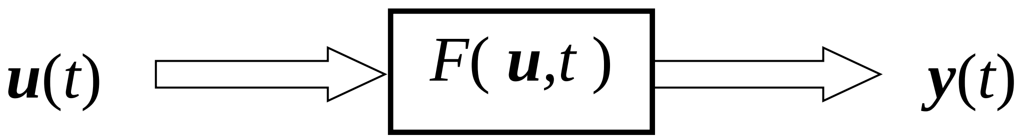
$$y=\begin{bmatrix} s \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ s' \\ \theta_1' \\ \theta_2' \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}u$$

自动控制原理中的传递函数方法描述二级倒立摆系统不太适合，需要能更完全描述系统的新方法。 **状态空间法**

## 1. 系统数学描述的两种基本类型

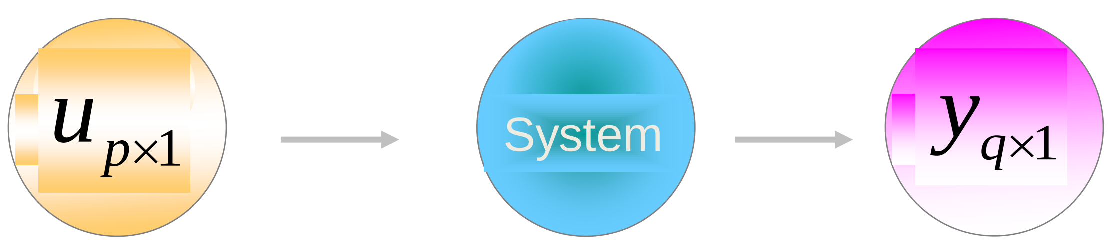
### 1）输入—输出描述（外部描述）

- **输入—输出描述**是描述系统输入—输出变量关系的模型。如传递函数.




系统的输入—输出描述

视系统为“*black box*”, 只描述输入-输出间的关系



例如.对SISO线性定常系统:时间域的外部描述:

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y^{(1)}+a_0y=b_{n-1}u^{(n-1)}+\cdots+b_1u^{(1)}+b_0u$$

复频率域描述即传递函数描述

$$g(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0}$$

口输入—输出描述（外部描述）仅描述系统的外部特性，不能反映系统的内部结构特征（即不能反映“黑箱”内部的某些部分），是对系统的一种不完全描述。

**例如：**

$$u \longrightarrow \boxed{\frac{1}{s-1}} \xrightarrow{x} \boxed{\frac{s-1}{s+1}} \longrightarrow y \qquad\qquad u \longrightarrow \boxed{\frac{s-1}{s+1}} \xrightarrow{x} \boxed{\frac{1}{s-1}} \longrightarrow y$$

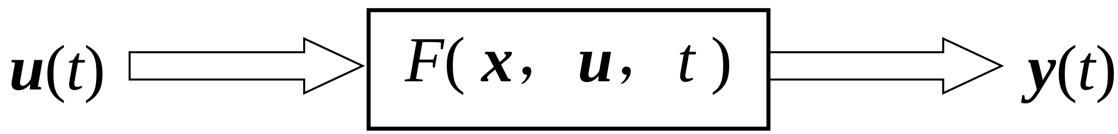
**从输入—输出关系来看，它们具有相同的传递函数：**

$$G(s)=\frac{1}{s+1}$$

**但事实上这是两个内部结构完全不同的系统。这两个系统是不等价的，这表明系统的内部特性比起由传递函数表达的外部特性要复杂得多，输入—输出描述没有包含系统的全部信息，不能完整的描述一个系统。**

## 2）状态空间描述（内部描述）

□ 状态空间描述通过建立系统内部状态和系统的输入以及输出之间的数学关系，来描述系统的行为。




系统的状态空间描述

□状态空间描述（内部描述）能完全表征系统的一切动力学特征，它是对系统的一个完全描述。

**状态空间描述**是基于内部结构分析的数学模型，通常**由两个数学方程组成。**

- **状态方程：** 是描述系统内部变量 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots x_n]^T$ 与输入变量 $\boldsymbol{u}=[u_1,u_2,\cdots u_p]^T$ 间因果关系的数学表达式，常具有微分方程或差分方程的形式。

- **输出方程：** 是表征系统内部变量 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots x_n]^T$ 及输入变量 $\boldsymbol{u}=[u_1,u_2,\cdots u_p]^T$ 和输出变量 $\boldsymbol{y}=[y_1,y_2,\cdots y_q]^T$ 间转换关系的数学表达式，具有代数方程的形式.

## 状态和状态空间的定义

### （1）状态、状态变量和状态向量

■ 系统在时间域中的行为或运动信息的集合称为状态。系统的状态是描述系统的过去、现在和未来行为的变量组，是用来完全表征系统时域行为的最小的一组变量， 记为 $x_1(t), x_2(t), \cdots, \ x_n(t)$ 。

■ 状态变量是构成系统状态的变量，是指能完全表征系统行为的最小变量组中的每一个变量。

■ **状态向量：**是由状态变量所构成的向量，即向量 $x(t)=\left[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\right]^T$ 称为$n$维状态向量。给定$t=t_0$ 时的初始状态向量$x(t_0)$及$t\geq t_0$的输入向量$u(t)$，则$t\geq t_0$的状态由状态向量$x(t)$唯一确定。

## 关于状态的几点说明：

**1）状态变量组可完全地表征系统行为的属性体现在：**只要给定这组变量 $x_1(t)$, $x_2(t), \cdots,$ $x_n(t)$ 在初始时刻$t_0$的值，以及输入变量 $u_1(t)$, $u_2(t), \cdots,$ $u_p(t)$ 在各瞬时$t\geq t_0$的值，则系统中任何一个变量在$t\geq t_0$时的运动行为就可以被完全确定。

**2）状态变量组的最小性体现在：**

状态变量 $x_1(t),\ x_2(t),\cdots,\ x_n(t)$ 是为完全表征系统行为所必需的系统变量的最少个数，减少变量数将破坏表征的完全性，而增加变量数将是完全表征系统行为所不需要的。

**3）状态变量组选取上的不唯一性：**

由于系统中变量的个数必大于$n$，而其中仅有$n$个是线性无关的，因此决定了状态变量组在选取上的不唯一性。

## 2 线性系统的状态空间描述

根据系统机理建立状态空间表达式

建立状态空间表达式的方法

由系统其它数学模型建立状态空间表达式

- **根据系统机理建立状态空间表达式：属于分析的途径，适用于结构和参数为已知的系统。**直接根据系统的机理建立相应的微分方程或差分方程，继而选择有关的物理量作为状态变量，从而导出其状态空间表达式。

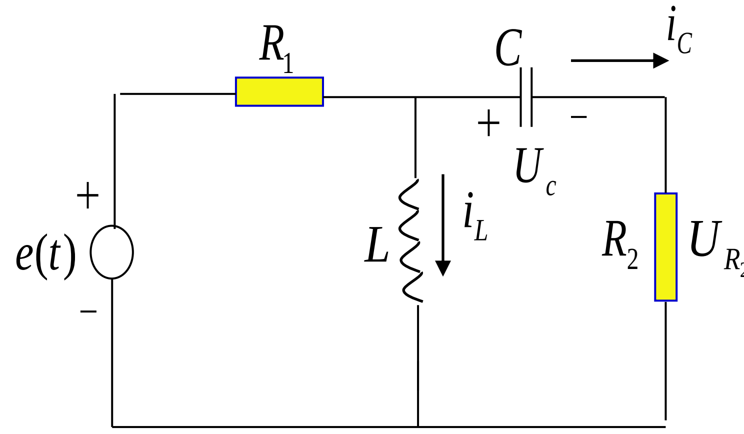
- **由系统其它数学模型建立状态空间表达式：属于辨识的途径，适用于结构和参数难以搞清楚的系统。**通过实验手段取得数据并采用适当的方法确定系统的输入输出模型(属于系统辨识和参数估计的范畴)，再由所得的系统输入输出描述导出相应的状态空间描述。

根据系统机理建立状态空间表达式的**基本步骤是：**

1) 根据系统所遵循的物理规律，建立系统的微分方程或差分方程；

2) 选取有关物理量 (变量) 作为状态变量，推导出系统的状态方程和输出方程。

电路系统状态空间描述的列写示例




$$\begin{cases} u_c + R_2 C \dfrac{du_c}{dt} - L \dfrac{di_L}{dt} = 0 \\ R_1 i_L + R_1 C \dfrac{du_c}{dt} + L \dfrac{di_L}{dt} = e \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_c \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{(R_1+R_2)C} & -\dfrac{R_1}{(R_1+R_2)C} \\ \dfrac{R_1}{L(R_1+R_2)} & -\dfrac{R_1 R_2}{L(R_1+R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(R_1+R_2)C} \\ \dfrac{R_2}{L(R_1+R_2)} \end{bmatrix} e$$

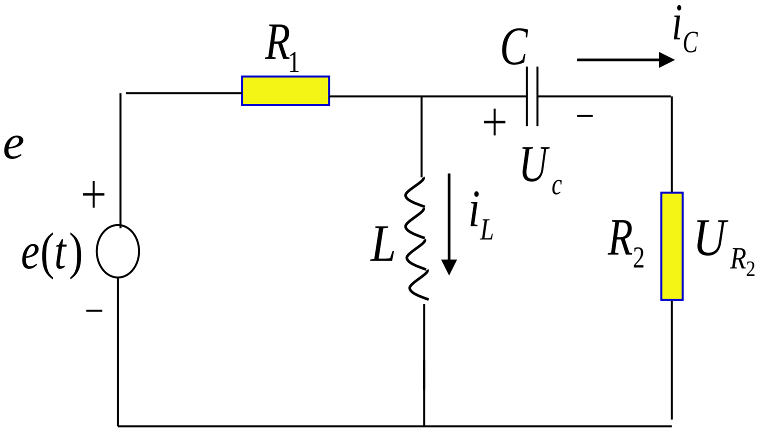
选择状态变量

电源电压*e(t)*为输入变量，

电阻*R*2端的电压为输出变量

$$u_{R_2} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_2}{R_1+R_2} & -\dfrac{R_1 R_2}{R_1+R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{R_2}{R_1+R_2} \end{bmatrix} e$$

$$\begin{bmatrix}\dot{u}_c\\ \dot{i}_L\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{(R_1+R_2)C} & -\dfrac{R_1}{(R_1+R_2)C}\\ \dfrac{R_1}{L(R_1+R_2)} & -\dfrac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_c\\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{(R_1+R_2)C}\\ \dfrac{R_2}{L(R_1+R_2)}\end{bmatrix}e$$




$$u_{R_2}=\begin{bmatrix}-\dfrac{R_2}{R_1+R_2} & -\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_c\\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{R_2}{R_1+R_2}\end{bmatrix}e$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{(R_1+R_2)C} & -\dfrac{R_1}{(R_1+R_2)C}\\ \dfrac{R_1}{L(R_1+R_2)} & -\dfrac{R_1R_2}{L(R_1+R_2)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{(R_1+R_2)C}\\ \dfrac{R_2}{L(R_1+R_2)}\end{bmatrix}u$$

以上方程可表为形如

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}$$

$$y=\begin{bmatrix}-\dfrac{R_2}{R_1+R_2} & -\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{R_2}{R_1+R_2}\end{bmatrix}u$$

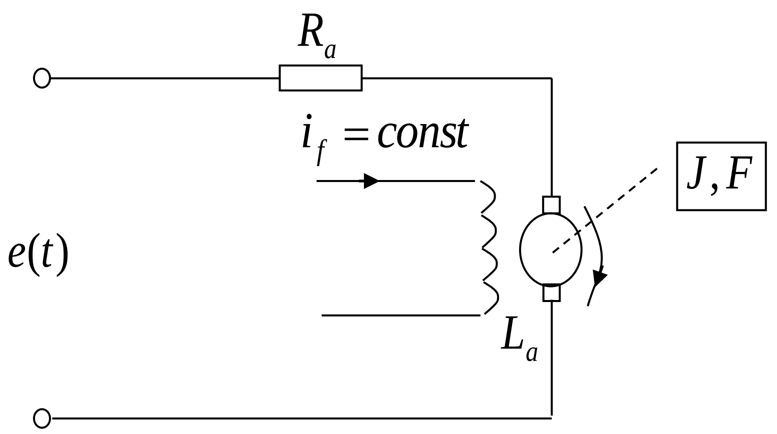
## 机电系统状态空间描述的列写示例

$$R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + c_e \omega = e \quad \text{电路方程}$$

$$c_M i_a - f\omega = J\frac{d\omega}{dt} \quad \text{机械方程}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_a}{L_a} & -\dfrac{c_e}{L_a} \\ \dfrac{c_M}{J} & -\dfrac{f}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix} e$$

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \end{bmatrix}$$



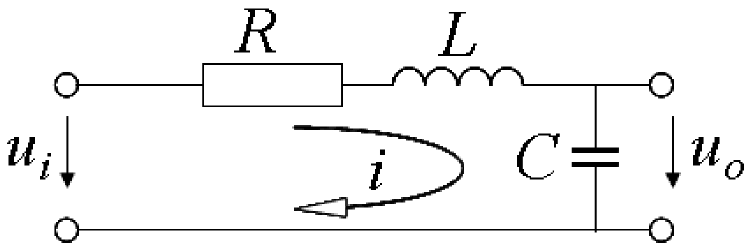

转子转速 $w$
反电势 $C_e w$
电磁力矩 $C_M i_a$
转动惯量 $J$

上式可表为形如

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}$$

## 例：建立RCL网络的状态空间表达式




**解：根据各元件的电流与电压关系、回路电压和等于零，得到系统的方程：**

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i dt = u_i$$

$$u_o = \frac{1}{C}\int i dt$$

**系统的输入、输出分别为**

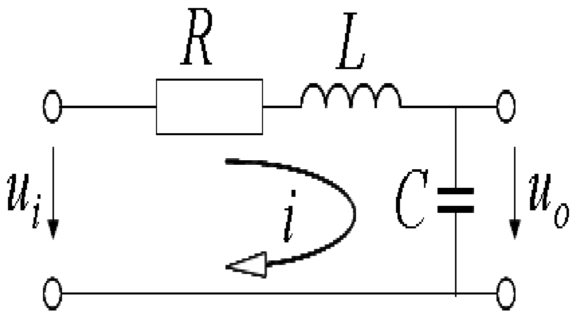
$$u = u_i, \quad y = u_o$$

**状态变量选取不唯一，但状态变量个数都等于系统阶数**
**状态变量选取不同，则状态空间描述不同。**

$a$）**选取状态变量** $x_1 = i$， $x_2 = \frac{1}{C}\int i dt = u_o$，**则状态空间描述为：**

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$




$b$）**选取状态变量** $x_1 = i$， $x_2 = \int i dt$，**则状态空间描述为：**

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/(CL) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

**它们之间的变换矩阵：**

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = i \\ \bar{x}_2 = \dfrac{1}{C}\int i dt \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} x_1 = i \\ x_2 = \int i dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = x_1 \\ \bar{x}_2 = \dfrac{1}{C} x_2 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$\bar{x} = Px,$

$x = Q\bar{x}$

$PQ = QP = I$

所以$P,Q$互逆，P,$Q$非奇异矩阵

**注意：该例说明一个系统的状态空间描述不是唯一的，各种描述之间可以相互转换，且不改变系统的固有性质。**

# 3 线性定常系统的表达式

**线性定常连续系统状态空间表达式为：**

$$\boxed{\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\,\boldsymbol{x}(t) + B\,\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = C\,\boldsymbol{x}(t) + D\,\boldsymbol{u}(t) \end{cases}}$$

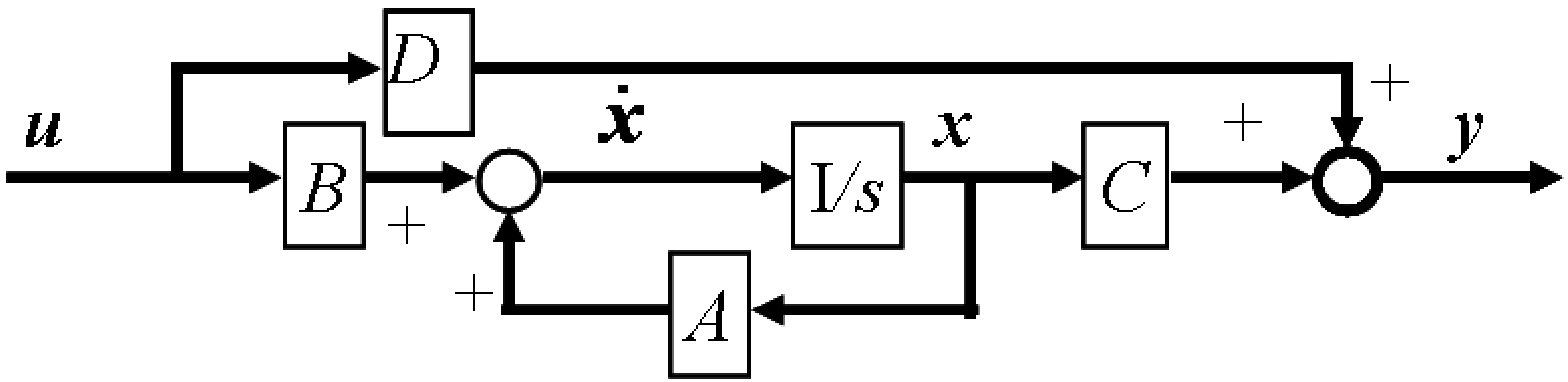
**(简记为** $(A, B, C, D)$ **)**

**线性定常离散系统状态空间表达式为：**

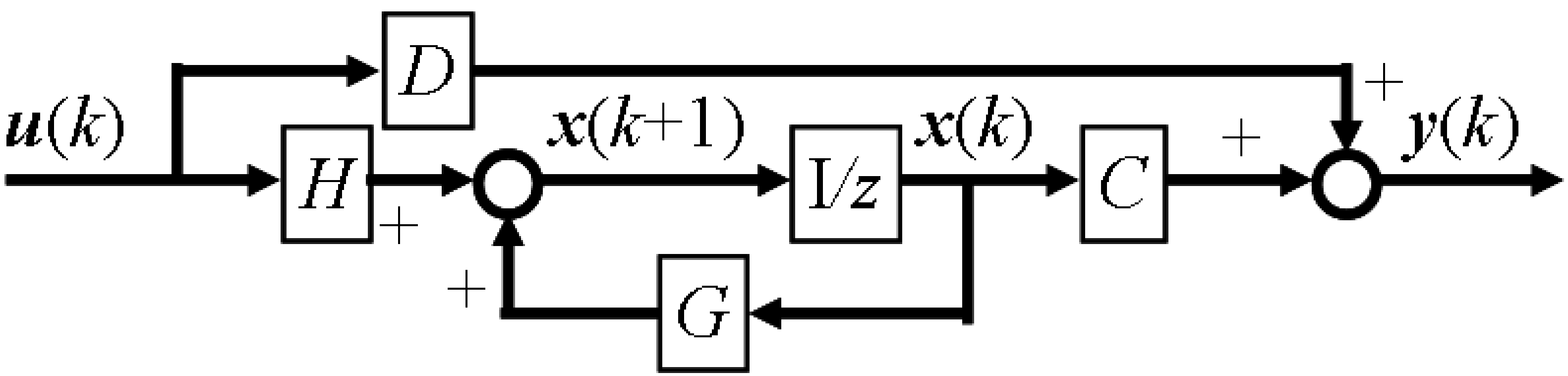
$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = G\boldsymbol{x}(k) + H\,\boldsymbol{u}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) = C\boldsymbol{x}(k) + D\boldsymbol{u}(k) \end{cases}$$

**(简记为** $(G, H, C, D)$**)**

# 线性系统状态空间表达式的模拟结构图




线性连续时间系统结构图




线性离散时间系统结构图

**说明：**$D$描述了输入$u$不经状态变量$x$对输出$y$的直接影响，它不影响系统的动态过程，实质上是系统外部模型的一部分。因此，当利用状态模型来分析系统动态行为时，常假设$D\equiv 0$，并不失对问题讨论的一般性。

所以通常采用的线性系统状态空间表达式为：

**连续时不变系统：**

$$\boxed{\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\,\boldsymbol{x}(t) + B\,\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = C\;\boldsymbol{x}(t) \end{cases}}$$

**（简记为** $(A, B, C)$ **）**

**离散时不变系统：**

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = G\boldsymbol{x}(k) + H\boldsymbol{u}(k) \\ \boldsymbol{y}(k) = C\boldsymbol{x}(k) \end{cases}$$

**（简记为**$(G, H, C)$ **）**

# 4 连续变量动态系统的线性化

## 线性系统和非线性系统

严格说，大多物理系统都是非线性的，很难求解，如不用数值解，一般无法解。

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ y = g(x,u) \end{cases}$$

向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)=\begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) \\ f_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) \\ \vdots \\ f_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)=\begin{bmatrix} g_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) \\ g_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) \\ \vdots \\ g_q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) \end{bmatrix}$

所以，在足够的精度下，用线性系统来近似，为此，设

$x_0, u_0, y_0$ 是非线性方程的一组解，即

$$\dot{x}_0 = f(x_0, u_0)$$

$$y_0 = g(x_0, u_0)$$

**非线性系统可以用泰勒展开方法化为线性系统**

用泰勒级数展开得：

$$f(x,u)=f(x_0,u_0)+\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_o,u_0}\delta x+\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x_0,u_0}\delta u+\alpha(\delta x,\delta u)$$

$$g(x,u)=g(x_0,u_0)+\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x_0,u_0}\delta x+\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{x_o,u_0}\delta u+\beta(\delta x,\delta i)$$

式中$\alpha,\beta$是关于$\delta x,\delta u$的高次项，可以忽略。

又因为，

$$\delta y=y-y_0=g(x,u)-g(x_0,u_0)=\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x_0,u_0}\delta x+\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{x_0,u_0}\delta u$$

引入如下符号：

$$\hat{x}\underline{\underline{\Delta}}\,\delta x,\quad \hat{u}\underline{\underline{\Delta}}\,\delta u,\quad \hat{y}\underline{\underline{\Delta}}\,\delta y,$$

$$A\underline{\underline{\Delta}}\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,u_0}\quad B\underline{\underline{\Delta}}\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x_0,u_0},\quad C\underline{\underline{\Delta}}\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x_0,u_0}\quad ,D\underline{\underline{\Delta}}\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{x_0,u_0}$$

$$\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^T}\right)_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0}$$

$$\boldsymbol{B} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}^T}\right)_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial u_p} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0}$$

$$\boldsymbol{C} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}^T}\right)_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_q}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_q}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0}$$

$$\boldsymbol{D} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{u}^T}\right)_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial u_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_q}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_q}{\partial u_p} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}_0}$$

线性化后的状态空间表达式为：

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B\hat{u}$$
$$\hat{y} = C\hat{x} + D\hat{u}$$

例：
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + x_2^3 + 2u \\ y = x_1 + \mathrm{x}_2^2 \end{cases}$$
在 $x_0$=0 处线性化

解：因为
$$\begin{cases} f_1 = x_2 \\ f_2 = x_1 + x_2 + x_2^3 + 2u \\ g = x_1 + \mathrm{x}_2^2 \end{cases}$$

所以

$$\left.\frac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial \mathrm{x}_1}\right|_{\mathrm{x}_0} = 0,\quad \left.\frac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial \mathrm{x}_2}\right|_{\mathrm{x}_0} = 1,\quad \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{x_0} = 1,\quad \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{x_0} = (1+3x_2^2)\Big|_{x_0} = 1,\quad \left.\frac{\partial g}{\partial x_1}\right|_{x_0} = 1,\quad \left.\frac{\partial g}{\partial x_2}\right|_{x_0} = 2x_2\Big|_{x_0} = 0,\quad \frac{\partial f_2}{\partial u} = 2$$

故 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad D = 0$

# 5 LQR(linear quadratic regulator):线性二次型控制器

**给定系统：**

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(0) = x_0$$

**设计控制器**

$$u(t) = -Kx(t)$$

**使得系统渐近稳定，同时最小化性能指标：**

$$\mathrm{J} = \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt$$

**无限时间状态反馈控制器**

**其中，Q为半正定对称矩阵，R为正定对称矩阵**

**把** $u(t) = -Kx(t)$ **代入到系统** $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$

**则闭环控制系统为：**

$$\dot{x} = (A - BK)x$$

**闭环控制系统性能指标：**

$$
\begin{aligned}
J &= \int_0^{\infty} (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R} \boldsymbol{u}) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\infty} \left[ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R} \boldsymbol{u} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(\boldsymbol{x}) \right] \mathrm{d}t - \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\infty} \left\{ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} [\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}) + (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}] \boldsymbol{x} \right\} \mathrm{d}t - V[\boldsymbol{x}(t)] \Big|_{t=0}^{t=\infty} \\
&= \int_0^{\infty} \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \left[ \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R} \boldsymbol{K} + \boldsymbol{P} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} - \boldsymbol{P} \boldsymbol{B} \boldsymbol{K} - \boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \right] \boldsymbol{x} \mathrm{d}t + \boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{x}_0
\end{aligned}
$$

$V(x) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P} \boldsymbol{x}$ **： Lyapunov函数，P正定对称矩阵**

用配方法可得：

$$J=\int_0^{\infty} x^{\mathrm{T}}[PA+A^{\mathrm{T}}P-PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P+Q]x\mathrm{d}t$$
$$+x_0^{\mathrm{T}}Px_0+\int_0^{\infty} x^{\mathrm{T}}(K-R^{-1}B^{\mathrm{T}}P)^{\mathrm{T}}R(K-R^{-1}B^{\mathrm{T}}P)x\mathrm{d}t$$

要使得性能指标最小：

$$\mathrm{K}=R^{-1}B^TP$$

$$\mathrm{PA}+A^TP-PBR^{-1}B^TP+Q=0$$ Riccati方程

最优性能指标为：

$$\mathrm{J}=x^T(0)Px(0)$$

**LQR方法设计步骤：**

**1） 给定Q、R矩阵，利用Riccatti方程：**

$$\mathrm{PA} + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

**求解出矩阵P。**

**2）利用** $\mathrm{K} = R^{-1}B^T P$ **求出反馈增益K，从而**

**得到控制器：**

$$u(t) = -Kx(t)$$

**注：**

1. 如要强调对状态的要求，则增大加权矩阵Q，相应的状态量的敏感度增加；
2. 若希望控制能量不要太大，相应的解决办法是增加加权矩阵R中的各元素，则控制力减小，角度变化变小，跟随速度变慢。
3. 若矩阵Q中定一些元素等于零，则说明对状态x中的某些分量没有要求，这也解释了加权矩阵Q为什么可以是半正定的原因。
4. 在一个实际问题中，要确定一个适当加权矩阵Q和R是不容易的，到目前为止，只能采用试凑的办法来进行。

# 实验步骤：

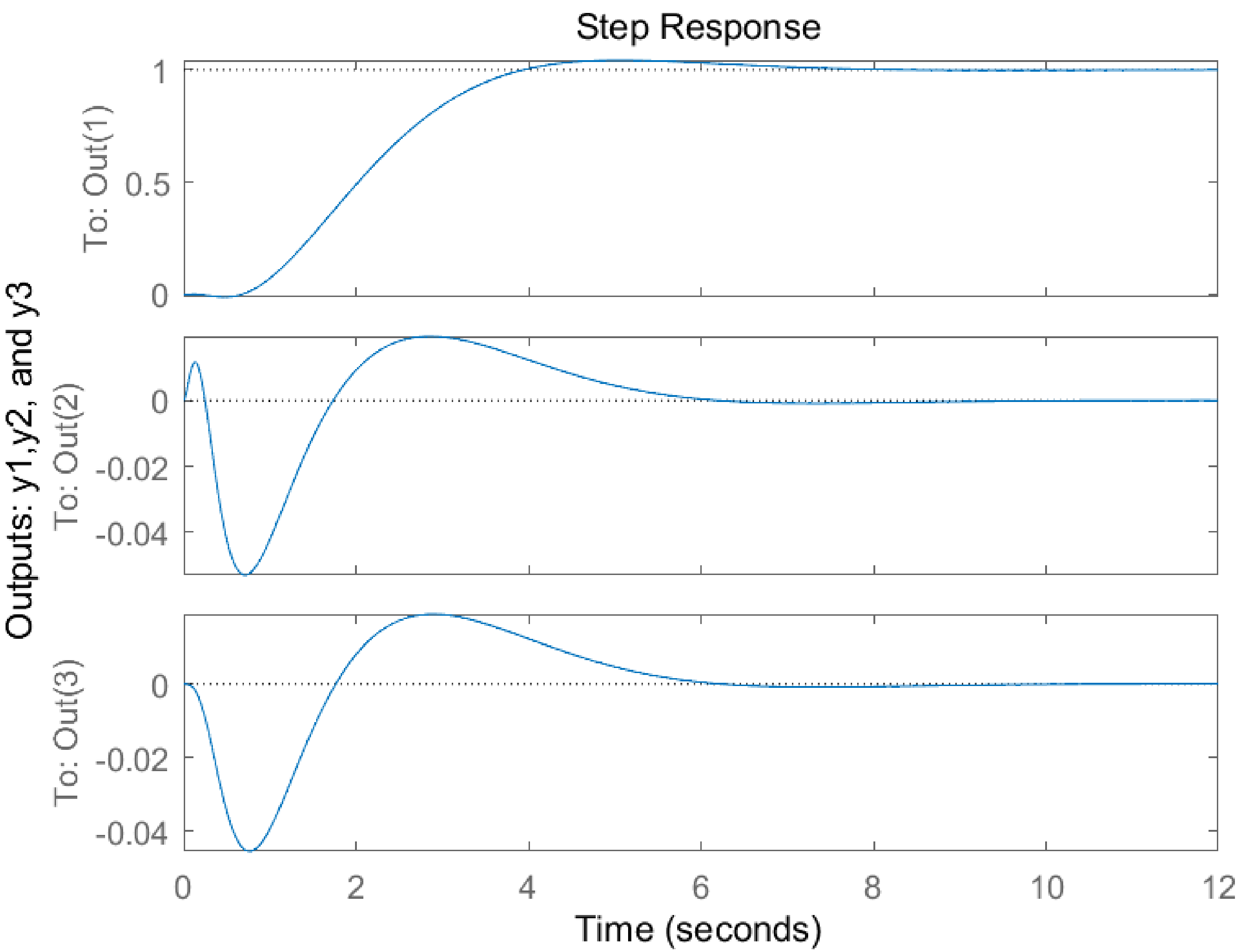
1）在Matlab中新建一个.m 文件，输入如下代码，保存后运行。

```
%描述系统状态及输出的系数矩阵
A=[0,0,0,1,0,0;0,0,0,0,1,0;0,0,0,0,0,1;0,0,0,0,0,0;0,89.69,-21.62,0,0,0;0,-
40.31,39.45,0,0,0];
B=[0;0;0;1;6.64;-0.088];
C=[1,0,0,0,0,0;0,1,0,0,0,0;0,0,1,0,0,0];
D=[0;0;0];

%选取Q矩阵
Q=zeros(6,6);
Q(1,1)=1;
Q(2,2)=1;
Q(3,3)=1;
R=1; %选取R矩阵
[K,P,Eigvalues_of_new_state_matrix]=lqr(A,B,Q,R)   %确定控制矩阵K

A_new=A-B*K;
sys_new=ss(A_new,B,C,D);
step(sys_new);   %系统阶跃响应
```

输出y的结果如下：

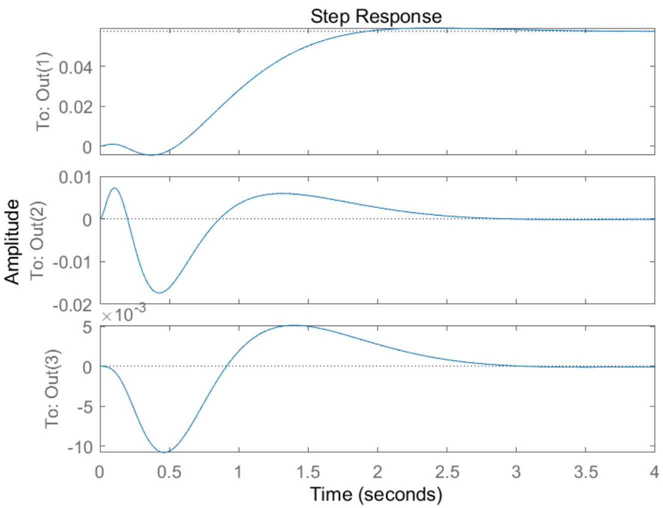



阶跃信号可看作是扰动

可以看出，输出y2和y3：摆杆1和摆杆2的角度稳定，但时间过长，因此增加权重 **Q** 的值

2）保持R值不变，更改Q中元素的值：

```
Q(1,1)=300;
Q(2,2)=500;
Q(3,3)=500;
```




重新运行程序，此时矩阵K的值：

K =[k1,k2,k3,k4,k5,k6]=

17.3205， 112.3115， -200.7915， 18.2426， 2.7711， -32.6419

即控制器为; $u=-Kx(t)=$

$$-[k_1x_1(t)+k_2x_2(t)+k_3x_3(t)+k_4x_4(t)+k_5x_5(t)+k_6x_6(t)]$$

观察响应时间有什么变化。

3）同时更改矩阵Q和R的值（**至少6组数据**），观察对结果有何影响？

# 实验报告要求：

1) 实验目的
2) 实验任务/要求
3) 实验仪器、设备及材料
4) 实验原理
5) 实验步骤
6) 实验结果及心得