中山大学本科生期末考试

考试科目:《高等数学一 (II)》(A 卷)

学年学期:	23–24 学年第 2 学期	姓　名:	
学　院/系:	数学学院	学　号:	
考试方式:	闭卷	年级专业:	
考试时长:	120 分钟	班　别:	

警示《中山大学授予学士学位工作细则》第八条:“考试作弊者,不授予学士学位.”

以下为试题区域,共 13 道大题,总分 100 分,考生请在答题纸上作答

1. 求 $\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 由 $y=0$ 以及 $y=\sin x(0\le x\le\pi)$ 所围。

解析

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}y\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

2. 求三重积分 $I=\iiint_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}V$, 其中 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$

解析 原式 $=\iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx\right)\mathrm{d}V$, 因为 Ω 关于三个坐标面对称, 而

$2xy, 2yz, 2zx$ 都至少关于某个变量为奇函数, 所以这些项的积分为 0 , 于是

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V \\
&= 3\iiint_\Omega z^2 \mathrm{d}V \\
&= 3\int_{-1}^{1} z^2 dz \iint_{x^2+y^2\le 1-z^2} dxdy \\
&= 6\int_0^1 z^2\pi(1-z^2)\,dz \\
&= \frac{4}{5}\pi
\end{aligned}
$$

3. 设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期，且满足 $f(x)=x^2, x\in[0,2\pi)$ 求出 $f(x)$ 的傅里叶级数及其和函数。

解析

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{2\pi} = \frac{8}{3}\pi^2. \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nx\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi n}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi n^2}[x\cos nx]\bigg|_0^{2\pi} - \frac{2}{\pi n^2}\int_0^{2\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{4}{n^2}. \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{n\pi}\left[x^2\cos nx\right]\bigg|_0^{2\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{4\pi}{n} - \frac{2}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x = -\frac{4\pi}{n}. \\
f(x) &\sim \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.
\end{aligned}
$$

$$
\frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \begin{cases} x & , x\ne 2n\pi \\ \dfrac{\pi^2}{2} & , x = 2n\pi \end{cases} \quad , n\in\mathbb{Z}
$$

4. 求曲面积分 $I=\iint\limits_{S+}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S^+ 是锥面 $x^2+y^2=z^2$ 在 $0\le z\le 1$ 中的部分的外侧

解析 这里 S 不是封闭曲面, 为利用高斯公式, 必须再添一些曲面, 使它们组成闭曲面. 考虑曲面

$$S_1: z=1,\quad 0\leqslant x^2+y^2\leqslant 1,$$

则 $S\cup S_1$ 组成闭曲面. 记 $S\cup S_1$ 围成的区域为 Ω，于是有

$$\begin{aligned}&\oiint_{(S\cup S_1)^+}(y-z)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(x-y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iiint_\Omega(0+0+0)\mathrm{d}V=0.\end{aligned}$$

这里 $(S\cup S_1)^+$ 表示区域 Ω 的边界曲面的外侧, 这时曲面 S_1 指向上侧, 记做 S_1^+, 曲面 S 指向外侧, 正好与题设中的 S^+ 一致, 因而有

$$\iint_{(S\cup S_1)^+}\sim=\iint_{S^+}\sim+\iint_{S_1^+}\sim.$$

于是由上式得

$$\begin{aligned}&\iint_{S^+}(y-z)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(x-y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=-\iint_{S_1^+}(y-z)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(x-y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=0+0-\iint_{S_1^+}\left(x-y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint_D\left(x-y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中 D 为平面区域: $0\leqslant x^2+y^2\leqslant 1$. 由对称性知 $\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$

$$\iint_D y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\sin^2\theta\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}.$$

最后得到$I=\frac{\pi}{4}$.

5. 求曲线积分 $\int_L\left(x^2+y\right)\mathrm{d}x+\left(x+y^2\sin^3y\right)\mathrm{d}y$，其中 L ：$y=\sqrt{x(2-x)}, y\geq 0$，方向为从 $(2,0)$ 到 $(0,0)$

解析 这里 $P(x,y)=x^2+y, Q(x,y)=x+y^2\sin^3y$. 因为 $\frac{\partial Q}{\partial x}=1=\frac{\partial P}{\partial y}$, 又它们在全平面上连续, 所以积分与路径无关, 就可换一条便于计算的积分路径. 如可取下列直线段 $\overline{AO}$ 为积分路径:

$$y=0,\quad 0\leqslant x\leqslant 2$$

这时

$$\begin{aligned}&\int_{\overset{\frown}{AO}}\left(x^2+y\right)\mathrm{d}x+\left(x+y^2\sin^3y\right)\mathrm{d}y\\&=\int_{\overline{AO}}\left(x^2+y\right)\mathrm{d}x+\left(x+y^2\sin^3y\right)\mathrm{d}y=\int_2^0x^2\,\mathrm{d}x=-\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

6. 求 $\int_L(x+y)\mathrm{d}s$， 其中 L 是从 $A(1,0)$ 到 $B(0,2)$ 的直线

解析

在$\overline{AB}$上: $y=2-2x, 0\leqslant x\leqslant 1$, $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{5}\,\mathrm{d}x$, 所以

$$\int_{\overline{AB}}(x+y)\mathrm{d}s=\int_0^1(x+2-2x)\sqrt{5}\,\mathrm{d}x=\frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

7. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+xy=x$ 的通解

解析 先解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+xy=0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-xy$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-x\mathrm{d}x$$

$$lny=-\frac{x^2}{2}+C$$

$$y=Ce^{-\frac{x^2}{2}}$$

原来方程的解为

$$y=C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$C'(x)e^{-\frac{x^2}{2}}=x$$

$$C'(x)=xe^{\frac{x^2}{2}}$$

$$C(x)=e^{\frac{x^2}{2}}+C$$

解为

$$y=Ce^{-\frac{x^2}{2}}+1$$

8. 求微分方程 $y''+9y=e^{5x}$ 的通解

解析 对应的齐次方程的特征根为 $\pm 3i$. “5 ”不是特征根, 所以设方程有特解

$$y=Ae^{5x},$$

代入微分方程得

$$A(25+9)e^{5x}=e^{5x}.$$

由此得 $A=\frac{1}{34}$, 故得特解 $y^*=\frac{1}{34}e^{5x}$. 于是微分方程的通解为

$$y(x)=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\frac{1}{34}e^{5x}.$$

9. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$ 的敛散性，若收敛，进一步判断是绝对收敛还是条件收敛

解析

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$$

$$\because \lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n^2+n}=0$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{n(n+1)}{2n+1}=\frac{2n+3}{2n+1}\cdot\frac{n}{n+2}=\frac{2n^2+3n}{2n^2+3n+2n+2}<1$$

$$\therefore u_{n+1}<u_n$$

$\therefore$根据莱布尼兹判别法 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot u_n$ 收敛

$$\because \sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\cdot\frac{2n+1}{n(n+1)}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}u_n.$$

令 $v_n=\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{n^2+n}=2.$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}u_n \leftrightarrows \sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 同发散。

$\therefore$ 条件收敛

10. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n+1}$ 的收敛域与和函数

解析 由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{x^n}\right|=|x|$, 可得收敛区间为 $(-1,1)$.
当 $x=1$ 时, 原级数收敛; 当 $x=-1$ 时, 原级数发散, 于是收敛域为 $(-1,1]$.
设 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n+1}$, 则 $xs(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n+1}$, 两边同时求导, 有

$$[xs(x)]'=-\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n=\frac{x}{1+x},$$

两边同时积分, 有

$$xs(x)=\int_0^x\frac{x}{1+x}dx=x-\ln(x+1)$$

本文由pl使用XeLaTeX编辑，更多资料加微信13316682031

故当 $x \neq 0$ 时, $s(x) = \dfrac{x - \ln(x+1)}{x}$; 当 $x = 0$ 时, 由 $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n+1}$, 得 $s(0) = 0$, 于是

$$s(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \ln(x+1)}{x}, & x \in (-1, 0) \cup (0, 1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

11. (1) 证明 $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin xy}{x} \mathrm{d}x$ 在 $y \in [2023, 2024]$ 上一致收敛

(2) 求 $\int_0^{+\infty} \dfrac{\cos 2023x - \cos 2024x}{x^2} \mathrm{d}x$

(1) **解析**

$$\left|\int_0^A \sin xy \,\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{1 - \cos(Ay)}{y}\right| \leqslant \frac{2}{y} \leqslant \frac{2}{2023}, \quad A \geqslant 0, \quad y \geqslant 2023,$$

因此它在 $[2023, 2024]$ 一致有界. 而 $\dfrac{1}{x}$ 是 x 的单调减少函数且 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, 由于 $\dfrac{1}{x}$ 与 y 无关, 因此这个极限关于 y 在 $[2023, 2024]$ 上是一致的. 于是由 Dirichlet 判别法知 $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin xy}{x} \mathrm{d}x$ 在 $[2023, 2024]$ 上一致收敛.

(2) **解析** 利用积分交换次序的方法, 由于

$$\frac{\cos 2023x - \cos 2024x}{x} = \int_{2023}^{2024} \sin xy \,\mathrm{d}y,$$

所以

$$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{2023}^{2024} \frac{\sin xy}{x} \mathrm{d}y,$$

由于含参变量反常积分 $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin xy}{x} \mathrm{d}x$ 在 $y \in [2023, 2024]$ 上一致收敛, 于是

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{2023}^{2024} \frac{\sin xy}{x} \mathrm{d}y = \int_{2023}^{2024} \mathrm{d}y \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x} \mathrm{d}x \\ &= \int_{2023}^{2024} \frac{\pi}{2} \mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

12. 判断 $\int_0^1 \dfrac{\ln x}{1 - x} \mathrm{d}x$ 的敛散性

解析 由于 $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\ln x}{1 - x} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\frac{1}{x}}{-1} = -1$, 故 $x = 1$ 不是瑕点. $x = 0$ 为唯一瑕点. 因 $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{\ln x}{x - 1} = 0$, 故积分 $\int_0^1 \dfrac{\ln x}{1 - x} \mathrm{d}x$ 收敛.

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 单调递增且有界,$a_n > 1$, 试证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}\left(1 - \dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 收敛

解析 记 $\sqrt{a_n} = u_n$, 则 $\{u_n\}$ 单调增加, 且 $u_n \geq 1$

则原级数的前 n 项部分和为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{u_k^2}{u_{k+1}^2}\right)\cdot\frac{1}{u_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{u_{k+1}^2-u_k^2}{u_{k+1}^3}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(u_{k+1}+u_k\right)\left(u_{k+1}-u_k\right)}{u_{k+1}^3}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{2u_{k+1}\left(u_{k+1}-u_k\right)}{u_{k+1}^3}=2\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(u_{k+1}-u_k\right)}{u_{k+1}^2}$$

$$\leq 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(u_{k+1}-u_k\right)}{u_k u_{k+1}}$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{u_k}-\frac{1}{u_{k+1}}\right)=2\left(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_{n+1}}\right)<\frac{2}{u_1}$$

故 $\{S_n\}$ 有上界, 从而可知这个级数收敛。