中山大学本科生期末考试

考试科目:《高等数学一（II）》(A 卷)

学年学期:	**2020–2021** 学年第 **2** 学期	姓　　名:	________
学　院/系:	数学学院	学　　号:	________
考试方式:	闭卷	年级专业:	________
考试时长:	**120** 分钟	班　　别:	________

警示　《中山大学授予学士学位工作细则》第八条:“考试作弊者, 不授予学士学位.”

以下为试题区域, 共 12 道大题, 总分 100 分, 考生请在答题纸上作答

一、确定实数 α 的范围, 使函数 $f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2\neq 0\end{cases}$, 在 $(0,0)$ 处可微 (12 分)

解:

偏导数存在是可微的必要条件,

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{2\alpha}\sin\frac{1}{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}x^{2\alpha-1}\sin\frac{1}{x^2}$$

当 $2\alpha-1>0$ 时，极限等于 0，即 $f_x'(0,0)=0$ 同理 $f_y'(0,0)=0$

当 $2\alpha-1\leq 0$ 是没有极限。

即如果函数可微，则 $\alpha>\dfrac{1}{2}$。

反之，如果 $\alpha>\dfrac{1}{2}$，则

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\left[f_x'(0,0)x+f_y'(0,0)y\right]}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ =&\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2+y^2\right)^{\alpha}\sin\frac{1}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ =&\lim_{x\to 0}\rho^{2\alpha-1}\sin\frac{1}{\rho^2}\\ =&0\end{aligned}$$

函数可微。

因此 $\alpha > \dfrac{1}{2}$ 是函数可微做的充分必要条件。

二、计算曲线积分 $\oint_L \left(xy^2 - \sin y\right) \mathrm{d}y - \left(\cos x + x^2 y\right) \mathrm{d}x$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = 4$, 积分方向为沿 L 逆时针方向 (12 分)

解:

$$
\begin{aligned}
& P = -\cos x - x^2 y, \quad Q = xy^2 - \sin y \\
& \frac{\partial P}{\partial y} = -x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2 \\
& \oint_L \left(xy^2 - \sin y\right) \mathrm{d}y - \left(\cos x + x^2 y\right) \mathrm{d}x \\
= & \iint_D \left(y^2 + x^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
= & \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^2 r^2 \cdot r\mathrm{d}r \\
= & \int_0^{2\pi} 4d\theta \\
= & 8\pi
\end{aligned}
$$

三、设三角形的周长为定值 $2p$, 求三边长使绕一边旋转所得到的旋转体体积最大。(12 分)

解:

设三角形底边上的高为 x, 垂足分底边的长度为 y, z. 设三角形饶底边旋转,

旋转体体积为

$$V = \frac{\pi}{3}x^2(y+z), y + z + \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+z^2} = 2p, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

V 在有界闭集上取最大值。

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2(y+z) + \lambda\left(y + z + \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+z^2} - 2p\right),$$

$$2x(y+z) + \lambda\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}\right) = 0, \tag{1}$$

$$x^2 + \lambda\left(1 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0, \tag{2}$$

$$x^2 + \lambda\left(1 + \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}\right) = 0 \tag{3}$$

$$y + z + \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+z^2} - 2p \tag{4}$$

$$(2) - (3) \Rightarrow \lambda\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}\right) = 0$$

若$\lambda = 0$, 将有$x = 0$, 不可能。故$\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} = 0.$

由于$y>0, z>0,$ 易得$y=z.$

$$2xy+\frac{\lambda x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

$$2y+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

$$x^2+\lambda\left(1+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=0,$$

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=p.$$

解之得 $y=z=\frac{p}{4}$, 底边长 $=\frac{\boldsymbol{P}}{2}$，两腰长 $=\frac{1}{2}\left(2p-\frac{p}{2}\right)=\frac{3p}{4}.$

四、求微分方程 $y\ln y\mathrm{d}x+(x-\ln y)\mathrm{d}y=0$ 的通解。(8 分)

$$y\ln y\mathrm{d}x+(x-\ln y)\mathrm{d}y=0$$

$$\ln y\mathrm{d}x+\frac{x}{y}\mathrm{d}y-\ln y\times\frac{1}{y}\mathrm{d}y=0$$

$$\ln y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}\ln y-\ln y\mathrm{d}\ln y=0$$

$$\mathrm{d}(x\ln x)-\mathrm{d}\frac{(\ln y)^2}{2}=0$$

$$\text{通解为}\,x\ln y-\frac{(\ln y)^2}{2}=C$$

五、求微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的通解。(8 分)

$$z=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{z\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$$

$$\frac{z\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=z^3+z,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=z^2+1$$

$$\frac{1}{z^2+1}\mathrm{d}z=\mathrm{d}y$$

$$\arctan z=y+C_1$$

$$z=tan(y+C_1),\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\left(y+C_1\right),\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{\tan\left(y+C_1\right)}$$

$$x=\ln\sin\left(y+C_1\right)+C_2$$

$$y=\arcsin e^{x-C_2}+C_1$$

六、求微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+y=e^x+\cos x$ 的通解。(8 分)

七、判断级数 $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\cdots$ 是收敛还是发散的。(6 分)

解:

$$\text{齐次方程的通解为}\,Y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$$

分别求$y'' + y = e^x$ 与$y'' + y = \cos x$的特解y_1^*, y_2^*

$y_1^* = \frac{1}{2}e^x, y_2^* = \frac{1}{2}x\sin x$

原方程的通解为$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}x\sin x$

八、根据 $a(a>0)$ 的值讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)^a$ 是收敛还是发散的。(6 分)

解:

$$a_n = \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)^a,\quad b_n = \left(\frac{1}{n^3}\right)^a.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left[n^3\left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)\right]^a$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[n^3 \times \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3}{3!}\right]^a = \left(\frac{1}{6}\right)^a$$

a_n, b_n同敛散性

当$a > \frac{1}{3}$时候$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛$\Rightarrow a_n = \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)^a$收敛

当$a \le \frac{1}{3}$时候$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散$\Rightarrow a_n = \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)^a$发散

九、函数项级数: $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}$, 证明:(1) 在任意闭区间 $[-M, M]$ (M 为大于 0 的给定的常数) 上一致收敛; (2) 在 $(-\infty, \infty)$ 不一致收敛。(8 分)

解:

(1) 当 $x \in [-M, M]$ 时, $\left|2^n \sin\frac{x}{3^n}\right| \le \left|2^n \cdot \frac{x}{3^n}\right| \le M\left(\frac{2}{3}\right)^n$

根据 M 判别法, 级数在 $[-M, M]$ 上-致收敛。

(2) 取 $x_n = 3^{n+1}$, 则 $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^k \sin\frac{x_n}{3^k}\right| \ge 2^{n+1}\sin 1 > \sin 1$

所以级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致收敛。

十、求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{4n}$ 的收敛半径。(6 分)

解:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2}x^{2(n+1)}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}}\right| = 4|x|^4$$

当 $4|x|^4 < 1$ 即 $|x| < \frac{1}{2}$ 时级数收敛;

当 $4|x|^4 > 1$ 即 $|x| > \frac{1}{2}$ 时级数发散;

所以收敛半径 $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$。

十一、求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ 的和函数。(6 分)

解:

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}, x\in(-1,1)$$

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}=\frac{1}{1-x^4}$$

$$\begin{aligned}S(x)&=\int_0^x\frac{1}{1-x^4}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^x\left(\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\left[\int_0^x\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x+\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{1}{2}\arctan x\end{aligned}$$

十二、求函数 $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式。(8 分)

解:

$$\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

令 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$

则 $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$=\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^6+\cdots+(-1)^n\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}x^{2n}+\cdots(|x|<1)$$

从而 $f(x)=\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x$

$$=x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}x^5-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7}x^7+\cdots+(-1)^n\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

所以 $\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

$$=-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

$$=-x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}x^5+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7}x^7-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$