中山大学本科生期末考试

考试科目:《高等数学一（II）》(A 卷)

学年学期:	2018–2019 学年第 2 学期	姓　　名:	
学　院/系:	数学学院	学　　号:	
考试方式:	闭卷	年级专业:	
考试时长:	120 分钟	班　　别:	

警示《中山大学授予学士学位工作细则》第八条:“考试作弊者，不授予学士学位.”

以下为试题区域，共 13 道大题，总分 100 分，考生请在答题纸上作答

1. (8 分) 求曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 和 $z=x^2+y^2$ 所围立体的体积

解析

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ z=x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow z=1$$

$$\begin{aligned} V &= \iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(\sqrt{2-x^2-y^2}-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(\sqrt{2-r^2}-r^2\right)r\mathrm{d}r \\ &= 2\pi\int_0^1\left(r\sqrt{2-r^2}-r^3\right)\mathrm{d}r \\ &= 2\pi\left(-\frac{1}{3}\left(2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1-\frac{1}{4}\right) \\ &= 2\pi\left(-\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{4}\right) \\ &= 2\pi\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{7}{12}\right) \\ &= \frac{(8\sqrt{2}-7)\pi}{6} \end{aligned}$$

2. (8 分) 计算曲线积分 $I=\int_C z\mathrm{d}s$, 其中 C 为圆锥螺线 $x=t\cos t, y=t\sin t,\ \ z=t$ 上对应于 $0\le t\le 1$ 的那一段。

解析

$$\begin{aligned}\int_C z\mathrm{d}s &= \int_0^1 t\sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t\sqrt{2+t^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}\left(2+t^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})\end{aligned}$$

3. (8 分) 计算曲面积分 $I = \oiint\limits_S x(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0, z=3$ 所围成的空间闭区域 Ω 的整个个边界曲面的外侧.

解析 因为

$$P=(y-z)x,\quad Q=0,\quad R=x-y,$$
$$\frac{\partial P}{\partial x}=y-z,\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial R}{\partial z}=0,$$

利用高斯公式把所给曲面积分化为三重积分, 再利用柱面坐标计算三重积分, 得

$$\begin{aligned}&\oiint_\Sigma (x-y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + (y-z)x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \iiint_\Omega (y-z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \iiint_\Omega (\rho\sin\theta - z)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_0^3(\rho\sin\theta - z)\mathrm{d}z \\ &= -\frac{9\pi}{2}.\end{aligned}$$

4. (8 分) 计算曲面积分 $I = \iint\limits_S (x+y+z)\mathrm{d}S$, 其中 S 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

解析 由于上半球面 Σ 关于 $x=0$ 和 $y=0$ 对称, 所以由对称奇偶性, 得

$$\begin{aligned}I &= \iint_\Sigma (x+y+z)\mathrm{d}S \\ &= 0+0+\iint_\Sigma z\,\mathrm{d}S \\ &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_{D_{xy}} a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \pi a^3\end{aligned}$$

5. (8 分) 计算曲线积分 $I=\int_C \frac{\mathrm{d}x}{y}+\frac{\mathrm{d}y}{x}$, 其中 C 为直线 $y=1, x=4$ 和 $y=\sqrt{x}$ 所围成的闭曲线, 方向是逆时针方向.

解析

$$\begin{aligned}
I &= \int_C \frac{\mathrm{d}x}{y}+\frac{\mathrm{d}y}{x} \\
&= \iint_\Sigma \frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_1^4 \mathrm{d}x \int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}y \\
&= \int_1^4 \mathrm{d}x \left(-\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}\right)\Big|_1^{\sqrt{x}} \\
&= \int_1^4 \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}+1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

6. (8 分) 求如下带初始条件的微分方程的解: $y'-y\tan x=\sec x, y(0)=1$.

解析

先解$y=y\tan x$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\tan x$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\tan x\mathrm{d}x$$

$$\ln|y|=-\ln|\cos x|+\ln C$$

$$y=\frac{C}{\cos x}$$

设非齐次方程的解为$y=\frac{C(x)}{\cos x}$

$$\frac{C'(x)\cos x+\sin xC(x)}{\cos^2 x}-\frac{C(x)\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{C'(x)}{\cos x}=\frac{1}{\cos x}$$

$$C'(x)=1$$

$$C(x)=x+C$$

$\therefore$解为$y=\frac{x+c}{\cos x}$

代入$y(0)=1 \Rightarrow C=1$

$$\therefore y=\frac{x+C}{\cos x}$$

7. (8 分) 求微分方程 $y'' - 6y' + 9y = (1+x)e^{2x}$ 的通解.

解析 特征方程 $r^2 - 6r + 9 = 0$ 特征根 $r_{1,2} = 3$,
对应齐次方程的通解为 $Y(x) = \left(C_1 + C_2 x\right) \mathrm{e}^{3x}$
因 $\lambda = 2$ 不是特征方程的根, 故设特解

$$\begin{aligned} y^* &= (ax+b)\mathrm{e}^{2x} \\ {y^*}' &= (2ax+2b+a)\mathrm{e}^{2x} \\ {y^*}'' &= (4ax+4b+4a)\mathrm{e}^{2x} \end{aligned}$$

将 $y^*, {y^*}', {y^*}''$ 代入原方程并整理得

$$(ax+b-2a)\mathrm{e}^{2x} = (x+1)\mathrm{e}^{2x}$$

比较等式两边同次项系数, 得

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$$

所以 $y^* = (x+3)\mathrm{e}^{2x}$,
故原方程的通解为 $y = \left(C_1 + C_2 x\right) \mathrm{e}^{3x} + (x+3)\mathrm{e}^{2x}$

8. (8 分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n+1}$ 的收敛域及和函数.

解析 由 $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{x^{n+1}}{n+2} \cdot \dfrac{n+1}{x^n} \right| = |x|$, 可得收敛区间为 $(-1, 1)$.
当 $x = 1$ 时, 原级数发散; 当 $x = -1$ 时, 原级数收敛, 于是收敛域为 $[-1, 1)$.
设 $s(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n+1}$, 则 $xs(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, 两边同时求导, 有

$$[xs(x)]' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

两边同时积分, 有

$$xs(x) = \int_0^x \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\ln(1-x), x \in [-1, 1).$$

故当 $x \neq 0$ 时, $s(x) = -\dfrac{1}{x}\ln(1-x)$; 当 $x = 0$ 时, 由 $s(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n+1}$, 得 $s(0) = 1$, 于是

$$s(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x}\ln(1-x), & x \in [-1, 0) \cup (0, 1), \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

9. (8 分) 判断级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \sin\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ 的敛散性, 若收敛请进一步判断是绝对收敛还是条件收敛.

解析 当 $n \geqslant 2$ 时, $\sin \frac{1}{\ln n} > 0$, 故原级数为交错级数.

由于 $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{\ln n}}{\frac{1}{\ln n}} = 1$,

又 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ 发散, 则 $\sum_{n=2}^{\infty} \left|(-1)^n \sin \frac{1}{\ln n}\right| = \sum_{n=2}^{\infty} \sin \frac{1}{\ln n}$ 发散, 故原级数不是绝对收敛.

又 $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{\ln n} = 0$, 取 $f(x) = \sin \frac{1}{\ln x}$

$f'(x) = \cos \frac{1}{\ln x}\left(-\frac{1}{\ln^2 x}\right)\frac{1}{x} < 0 (x \geqslant 2)$,

故 $f(x)$ 单调减少, 即 $f(n) > f(n+1)$, 也即 $u_n > u_{n+1}$, 满足莱布尼茨条件, 因此该级数条件收敛.

10. (8 分) 判断广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$ 的敛散性, 若收敛请求出其值.

解析

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5} &= \int_0^{\infty} \frac{1}{(x+2)^2+1} d(x+2) \\ &= \arctan(x+2)|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan 2\end{aligned}$$

故广义积分收敛于 $\frac{\pi}{2} - \arctan 2$

11. (8 分) 证明含参变量的广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx$ 在区间 $a \in [1, +\infty)$ 上一致收敛

解析 令 $f(x, b) = \sin(ax), g(x, b) = \frac{1}{x}$

$$\left|\int_1^A \sin(ax) dx\right| \leq 2$$

$\frac{1}{x}$ 对 $x \in [1, +\infty]$ 单调递减,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

根据狄利克雷判别法，含参变量的广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{x} dx$ 在区间 $a \in [1, +\infty)$ 上一致收敛

12. (8 分) 设 $f(x)$ 以 2π 为周期，它在一个周期上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

求 $f(x)$ 的傅氏级数及该级数的和函数.

解析 函数 $f(x)$ 满足收敛定理的条件, 故它可以展开成傅里叶级数, 由于

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

当 $n\geq 1$ 时

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n\pi}x\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}\\&=\frac{1}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}-\dfrac{2}{n^2\pi}, & \text{当}n\text{为奇数时}\\0, & \text{当}n\text{为偶数时}\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{n\pi}x\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x=\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{1}{n^2\pi}\sin nx\Big|_0^{\pi}=\frac{(-1)^{n+1}}{n}\end{aligned}$$

所以

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-\left(\frac{2}{\pi}\cos x-\sin x\right)-\frac{1}{2}\sin 2x-\left(\frac{2}{9\pi}\cos 3x-\frac{1}{3}\sin 3x\right)\cdots$$
$$(-\infty<x<+\infty),x\neq(2n+1)\pi,n\in\mathbb{Z}$$

当 $x=(2n+1)\pi,n\in\mathbb{Z}$ 时, 上式右边收敛于

$$\frac{f(\pi^-)+f(-\pi^+)}{2}=\frac{\pi}{2}$$

13. (4 分) 设二元光滑函数 $u(x,y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad (x,y)\in B_1(0)$$

，其中 $B_1(0)$ 是以原点为圆心的单位圆盘. 又设

$$\phi(r)=\frac{1}{2\pi r}\int_{\partial B_r(0)}u(x,y)\mathrm{d}s,\quad 0<r\leq 1,$$

其中 $\partial B_r(0)$ 是以原点为圆心, r 为半径的圆周.
证明: 对任意的 $r\in(0,1),\phi'(r)=0$.