中山大学本科生期末考试

考试科目:《高等数学一（II）》(A 卷)

学年学期:	2016–2017 学年第 2 学期	姓　　名:	
学　院/系:	数学学院	学　　号:	
考试方式:	闭卷	年级专业:	
考试时长:	120 分钟	班　　别:	

警示《中山大学授予学士学位工作细则》第八条:“考试作弊者，不授予学士学位.”

以下为试题区域，共 13 道大题，总分 100 分，考生请在答题纸上作答

1. (8 分) 计算积分 $\iint_D \left[e^{x^2}+\cos(1-y)^2\right]\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 由 $y=x, y=0, x=1$ 所围

解析

$$\begin{aligned}\iint_D \left[e^{x^2}+\cos(1-y)^2\right]\mathrm{d}\sigma &= \iint_D e^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D \cos(1-y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x e^{x^2}\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\cos(1-y)^2\mathrm{d}x\\ &=\int_0^1 e^{x^2}x\mathrm{d}x+\int_0^1\cos(1-y)^2(1-y)\mathrm{d}y\\ &=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1+\frac{\sin(1-y)^2}{2}\Big|_1^0\\ &=\frac{e}{2}-\frac{1}{2}+\frac{\sin 1}{2}\end{aligned}$$

2. (8 分) 计算积分 $\int_L e^x\cos y\mathrm{d}x-e^x\sin y\mathrm{d}y$, 其中 L 是曲线 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$ 从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的一段弧。

解析 $P(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y, Q(x,y)=-\mathrm{e}^x\sin y$,

$\frac{\partial P}{\partial y}=-\mathrm{e}^x\sin y=\frac{\partial Q}{\partial x}$,

故曲线积分与路径无关,

取路径 $\overline{AC}: y=0(0\le x\le 1)$, 以及 $\overline{CB}: x=1(0\le y\le 1)$, 则

$$\int_L \mathrm{e}^x\cos y\,\mathrm{d}x-\mathrm{e}^x\sin y\,\mathrm{d}y=\int_{\overline{AC}}\mathrm{e}^x\cos y\,\mathrm{d}x-\mathrm{e}^x\sin y\,\mathrm{d}y+\int_{\overline{CB}}\mathrm{e}^x\cos y\,\mathrm{d}x-\mathrm{e}^x\sin y\,\mathrm{d}y$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 e^x \, dx - \int_0^1 e \sin y \, dy \\
&= e - 1 + e \cos y|_0^1 \\
&= e - 1 + e(\cos 1 - 1) \\
&= -1 + e \cos 1
\end{aligned}
$$

3. (8 分) 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y+1}{4x+2y-3}$ 的通解

解析 这里分子分母中的 x, y 项的系数成比例. 故令 $z = 2x + y$, 则

$$z' = 2 + y' = 2 + \frac{z+1}{2z-3} = \frac{5(z-1)}{2z-3}.$$

分离变量并积分得

$$\int \frac{2z-3}{z-1} \, dz = \int 5 \, dx$$

由此可求出通积分

$$z - 1 = Ce^{2z-5x}.$$

再用 x, y 表示 z, 得原方程的通积分 $2x + y - 1 = Ce^{2y-x}$, 其中 C 为任意常数.

4. (8 分) 求初值问题 $\begin{cases} y'' + 2y' + 4y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 1 \end{cases}$ 的解

解析 先求方程的通解, 其特征方程为

$$k^2 + 2k + 4 = 0,$$

它的两个根为 $k_1 = -1 + \sqrt{3}i, k_2 = -1 - \sqrt{3}i$, 所以方程的通解为

$$y = e^{-x}\left(C_1 \cos \sqrt{3}x + C_2 \sin \sqrt{3}x\right).$$

利用初值条件确定 C_1, C_2 :

$$
\begin{aligned}
1 &= y(0) = C_1, \\
1 &= y'(0) = -C_1 + \sqrt{3}C_2,
\end{aligned}
$$

故 $C_1 = 1, C_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, 即所求的初值问题的解为

$$y = e^{-x}\left(\cos \sqrt{3}x + \frac{2}{3}\sqrt{3} \sin \sqrt{3}x\right).$$

5. (8 分) 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \tan \frac{3}{n}$ 的敛散性, 并进步判定是绝对收敛还是条件收敛.

解析 $y = \tan \frac{3}{n}$ 单调递减。

$\lim_{n\to\infty} \tan \frac{3}{n} = 0$

由莱布尼茨判别法 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tan\frac{3}{n}$ 收敛

$\tan\frac{3}{n} > \frac{3}{n}$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n}$ 发散

由比较判别法 $\sum_{n=1}^{\infty}\tan\frac{3}{n}$ 发散

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tan\frac{3}{n}$ 条件收敛。

6. (8 分) 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\mathrm{d}x.$

解析

$$\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x} = \int_1^2 \mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\mathrm{d}x &= \int_0^{\infty}\mathrm{d}x\int_1^2 \mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y \\
&= \int_1^2\mathrm{d}y\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x \\
&= \int_1^2 -\frac{1}{y}\mathrm{d}y\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}(-xy) \\
&= \int_1^2\left(-\frac{1}{y}\right)[\mathrm{e}^{-xy}]_0^{\infty}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_1^2\left(-\frac{1}{y}\right)(0-1)\mathrm{d}y \\
&= \int_1^2\frac{1}{y}\mathrm{d}y \\
&= \ln 2-\ln 1 \\
&= \ln 2
\end{aligned}$$

7. (8 分) 求函数 $f(x)=\frac{x}{x^2-2x-3}$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式, 并指出收敛域.

解析

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{(x-3)(x+1)} \\
&= \frac{\frac{3}{4}}{x-3} + \frac{\frac{1}{4}}{x+1} \\
&= \frac{-\frac{1}{4}}{1-\frac{x}{3}} + \frac{\frac{1}{4}}{1+x} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-\frac{x}{3}}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n\right) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n - \left(\frac{x}{3}\right)^n \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]x^n
\end{aligned}
$$

8. (8 分) 讨论积分 $\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}\sin(tx)\mathrm{d}x$, 在 $0 < t_0 < t < +\infty$ 的一致收敛性.

解析 令 $f(x,t) = \sin(tx), g(x,t) = e^{-t^2x^2}$

$$\left|\int_1^A \sin(tx)\mathrm{d}x\right| \le 2$$

$e^{-t^2x^2}$ 对 $x \in [0,+\infty]$ 单调递减,

$$0 < e^{-t^2x^2} \le e^{-t_0^2x^2}$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-t_0^2x^2} = 0$$

则 $e^{-t^2x^2}$ 在 $x \to +\infty$ 时一致趋于 0

根据狄利克雷判别法，含参变量的广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}\sin(tx)\mathrm{d}x$, 在 $0 < t_0 < t < +\infty$ 一致收敛

9. (8 分) 将 $f(x) = 2x$ 在 [0,1] 上展开成正弦级数, 并写出该正弦级数在 $[0,1]$ 上的和函数.

解析 对函数进行奇延拓, 满足狄利克雷条件

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{1}\int_0^1 2x\sin(n\pi x)\mathrm{d}x = \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin n\pi x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin n\pi x = \begin{cases} f(x) & ,x \in [0,1) \\ 1 & ,x = 1 \end{cases}$$

10. (8 分) 判定积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2+1}\mathrm{d}x$ 的敛散性

解析 令 $f(x)=\cos x, g(x)=\frac{x}{x^2+1}$

则对一切 $A>1$, $\left|\int_1^A \cos x\mathrm{d}x\right| = |\sin A - \sin 1| \le 2$, 即 $\int_1^A f(x)\mathrm{d}x$ 有界

而 $g(x)=\frac{x}{x^2+1}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减且趋于零

根据狄利克雷判别法得 $\int_1^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2+1}\mathrm{d}x$ 收敛

11. (8 分) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$ 的收敛域及和函数.

解析

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\times n(n+2)}{(n+1)(n+3)x^n}\right| = |x| < 1$$

收敛半径为 1,

当 $x=1$, $\frac{1}{n(n+2)} < \frac{1}{n^2}$, 由比较判别法知收敛

当 $x=-1$, 由莱布尼兹判别法知收敛

收敛域为 $[-1,1]$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+2)}$$
$$x^2S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n(n+2)}$$
$$(x^2S(x))'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}$$
$$\frac{1}{x}(x^2S(x))'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$
$$\left(\frac{1}{x}(x^2S(x))'\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$$
$$\frac{1}{x}(x^2S(x))'=-\ln(1-x)$$
$$(x^2S(x))'=-x\ln(1-x)$$
$$x^2S(x)-0S(0)=\int_0^x -x\ln(1-x)\mathrm{d}x=\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{\ln(1-x)}{2}-\frac{1}{2}x^2\ln(1-x)$$
$$S(x)=\frac{1}{2x}+\frac{1}{4}+\frac{\ln(1-x)}{2x^2}-\frac{\ln(1-x)}{2}$$

$$S(x)=\begin{cases} 0 & ,x=0 \\ \frac{3}{4} & ,x=1 \\ \frac{1}{2x}+\frac{1}{4}+\frac{\ln(1-x)}{2x^2}-\frac{\ln(1-x)}{2} & ,-1\le x<0 \quad \text{or} \quad 0<x<1 \end{cases}$$

本文档由pl使用XeLaTeX编辑整理，需要更多真题资料请添加微信13316682031,不提倡二次倒卖等不道德的行为哦，编译于2023-06-16

12. (6 分) 计算积分 $\int_0^{1/3} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^3}$

解析 $x=0$ 为唯一的瑕点

$$\begin{aligned}\int_0^{1/3} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^3} &= \lim_{a\to 0+0} \int_a^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\ln^3 x} \mathrm{d}\ln x \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{a\to 0+0} \frac{1}{\ln^2 x}\bigg|_a^{\frac{1}{3}} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{\ln^2 3} + 0 \\ &= -\frac{1}{2\ln^2 3}\end{aligned}$$

13. (6 分) 判断积分 $\int_0^1 \frac{\arctan x}{1-x^3}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解析 $x=1$ 为唯一的瑕点,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{\arctan x}{1-x^3}}{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\arctan x}{1+x^2+x} = \frac{\arctan 1}{1+1^2+1} = \frac{\pi}{12}$$

由于 $\int_0^1 \frac{1}{1-x}\mathrm{d}x$ 发散，根据比较判别法，$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1-x^3}\mathrm{d}x$ 发散