中山大学本科生期末考试

考试科目:《高等数学一（II)》(A 卷)

学年学期:	**2015–2016** 学年第 **2** 学期	姓　　名:	
学　院/系:	数学学院	学　　号:	
考试方式:	闭卷	年级专业:	
考试时长:	**120** 分钟	班　　别:	

警示《中山大学授予学士学位工作细则》第八条:“考试作弊者,不授予学士学位.”

以下为试题区域, 共 12 道大题, 总分 100 分, 考生请在答题纸上作答

1. (8 分) 计算 $\iiint_\Omega z\sqrt{(x^2+y^2)^3}dV$, 其中 Ω 是由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 所围的闭区域。

解析

$$I=\iiint_\Omega z\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 dxdydz$$

$$令 x=r\cos\theta \quad y=r\sin\theta$$

$$=\int_r^1 dz\cdot\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^1 z\cdot r^3\cdot rdr$$

$$=2\pi\cdot\int_0^1\frac{1-r^2}{2}r^4dr$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 r^4-r^6dr$$

$$=\pi\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)=\frac{2\pi}{35}$$

2. (8 分) 计算 $\iint_\Sigma(x+y+z)dS$, 其中 Σ 是平面 $2y+z=2$ 被柱面 $x^2+y^2=25$ 所截得的部分。

解析

$$\therefore \vec{n} = (0,2,1)$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_{s}(x+y+z)ds \\ &= \iint\limits_{x^2+y^2\le 25} [x+y+(2-2y)]\cdot\frac{\sqrt{5}}{1}dxdy \\ &= \iint\limits_{x^2+y^2\le 25} (x+2-y)\cdot\sqrt{5}dxdy \text{ 根据对称性} \\ &= \sqrt{5}\iint\limits_{x^2+y^2\le 25} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \sqrt{5}\times 2\times 25\pi \\ &= 50\sqrt{5}\pi \end{aligned}$$

3. (8 分) 计算 $I=\int_L \left(x^3-3xy^2\right)dx+\left(y^3-3x^2y\right)dy$, 其中 L 是曲线 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$ 由点 $O(0,0)$ 到点 $A(1,1)$ 的部分。

解析 $I=\int_L \left(x^3-3xy^2\right)dx+\left(y^3-3x^2y\right)dy$

$L:(0.0)\to(1,1)\quad y=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

$\therefore\frac{\partial P}{\partial y}=-6xy\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-6xy\therefore$ 可知此积分与路径无关.

选 $y=x$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x^3-3x^3dx+x^3-3x^3dx \\ &= \int_0^1 -4x^3dx=-1 \end{aligned}$$

4. (8 分) 求微分方程 $y'-3xy=x$ 的通解。

本文档由pl使用XeLaTeX编辑整理，需要更多真题资料请添加微信13316682031,不提倡二次倒卖等不道德的行为哦，编译于2023-06-16

解析

1^0 齐次

$$\frac{dy}{dx}=3xy$$
$$\frac{dy}{y}=3xdx$$
$$\ln|y|=\frac{3}{2}x^2+C$$
$$y=C\cdot e^{\frac{3}{2}x^2}$$

2^0 常数易变

$$y=C(x)\cdot e^{\frac{3}{2}x^2}$$
$$\therefore C'(x)\cdot e^{\frac{3}{2}x^2}=x$$
$$dx\cdot C'(x)=x\cdot e^{\frac{-3}{2}x^2}dx$$
$$C(x)=\int e^{\frac{-3}{2}x^2}d\left(\frac{1}{2}x^2\right)$$
$$C(x)=\frac{-1}{3}e^{\frac{-3}{2}x^2}+C$$
$$\therefore y=C\cdot e^{\frac{3}{2}x^2}-\frac{1}{3}$$

5. (8 分) 求微分方程 $y''+3y'+2y=\sin x$ 的通解。

解析 1° 齐次, 考虑特征方程

$$\lambda^2+3\lambda+2=0$$
$$(\lambda+2)(\lambda+1)=0$$
$$\lambda_1=-2\quad \lambda_2=-1$$
$$\therefore y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}$$

2° 常数数易变

$$C_1'(x)e^{-2x}+C_2'(x)e^{-x}=0$$
$$-2c'(x)\cdot e^{-2x}-c_2'(x)\cdot e^{-x}=\sin x$$
$$C'(x)\cdot e^{-2x}=-\sin x$$
$$C_1'(x)=-e^{2x}\cdot\sin x$$
$$C'(x)=\frac{(\cos x-2\sin x)}{5}e^{2x}+C_1$$
$$-\sin x+C_2'(x)\cdot e^{-x}=0$$
$$C_2'(x)=\sin x\cdot e^x$$
$$C_2(x)=\frac{\sin x-\cos x}{2}e^x+C_2$$
$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}+\frac{\cos x-2\sin x}{5}+\frac{\sin x-\cos x}{2}$$
$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}+\frac{\sin x-3\cos x}{10}$$

6. (8 分) 判断级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^2}{2^{n+1}}$ 的敛散性。

解析

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)^2\times 2^{n+1}}{2^{n+3}\times(2n+1)^2}=\frac{1}{4}<1$$

根据比值判别法，原级数收敛

7. (8 分) 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 的敛散性, 并进一步判断是绝对收敛还是条件收敛

解析 所给级数是交错级数, 记 $a_n=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, 则 $a_n>0$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^n a_n\right|}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=1,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n a_n\right|$ 发散, 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 不是绝对收敛. 又 a_n 满足

$$a_{n+1}=\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)<\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=a_n,\quad \lim_{n\to\infty}a_n=0,$$

因此由莱布尼茨定理可推得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛, 所以该级数是条件收敛.

8. (8 分) 判断积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x+1}}dx$ 的敛散性。

解析 令 $\sqrt{x}=t, \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x&=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t\times 2t}{t\sqrt[3]{t^2+1}}\mathrm{d}t\\&=\int_1^{+\infty}\frac{2\sin t}{\sqrt[3]{t^2+1}}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$\left|\int_1^A 2\sin t\mathrm{d}t\right|\leq 4$(部分和有界)

$\frac{1}{\sqrt[3]{t^2+1}}$ 单调递减，且 $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{t^2+1}}=0$

故根据狄利克雷判别法，原积分收敛

9. (8 分) 判断积分 $\int_1^2\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}}$ 的敛散性, 若收敛请计算其值。

解析 $x=1$ 为瑕点

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}} &= \int_0^1 \frac{t+1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \sqrt{t}\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\\ &= \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 + 2\sqrt{t}\Big|_0^1\\ &= \frac{2}{3}+2\\ &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

10. (8 分) 计算 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan ax-\arctan bx}{x}\mathrm{d}x,(b>a>0)$.

解析 当 $x\in[0,+\infty), y\in[a,b]$ 时, $\frac{1}{1+x^2y^2}$ 连续, 且 $\frac{1}{1+x^2y^2}\leq\frac{1}{1+a^2x^2}$ 而

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+a^2x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\arctan(ax)\ |_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2a}$$

根据 M-判别法, $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2y^2}\mathrm{d}x$ 在 $y\in[a,b]$ 一致收敛

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_b^a\frac{1}{1+x^2y^2}\mathrm{d}y\\ &=\int_b^a\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2y^2}\mathrm{d}x\\ &=\int_b^a\frac{1}{y}\arctan(xy)\ |_{x=0}^{x=+\infty}\ \mathrm{d}y\\ &=\frac{\pi}{2}\int_b^a\frac{1}{y}\mathrm{d}y\\ &=\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}\end{aligned}$$

11. (10 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}$ 的收敛域及和函数 $S(x)$

解析 记 $u_n=\frac{1}{n2^n}x^{n-1}$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{(n+1)2^{n+1}}\cdot\frac{n2^n}{x^{n-1}}\right|=\frac{|x|}{2}.$$

令 $\frac{|x|}{2}<1$, 知原级数在开区间 $(-2,2)$ 内每一点都收敛.

当 $x=-2$ 时, 原级数 $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}(-2)^{n-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, 故由莱布尼茨审敛法知其收敛;

当 $x=2$ 时, 原级数 $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}2^{n-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, 显然发散, 故幂级数的收敛域为 $[-2,2)$.

当 $x\neq 0$ 时, 记 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\frac{1}{x}S_1(x)$,

其中 $S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n$.

由于 $S_1'(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2-x}$,

于是 $S_1(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{2-t}+S_1(0)=\ln\frac{2}{2-x}$.

note: 先求导前函数 $\ln\frac{1}{2-t}$ ，在把导前函数代入 0，（$-\ln 2$），根据牛顿莱布尼兹公式得到定积分的值，对于 $S_1(0)$ 假设为零，一般也是零，代入积分值刚好就是零，不矛盾这个式子就是牛顿莱布尼兹的定义式，符合常理

当 $x=0$ 时, $S(0)=\frac{1}{2}$.

因此幂级数的和函数为 $S(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\ln\frac{2}{2-x}, & x\in[-2,2),\ 且 x\neq 0,\\ \frac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$

12. (10 分) 将 $f(x)=x+|x|$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开成傅氏级数, 并求该级数在 $[-\pi,\pi]$ 上的和函数 $S(x)$ 。

解析

$$f(x)=\begin{cases}2x & ,x\in(0,\pi]\\ 0 & ,x\in[-\pi,0]\end{cases}$$

经过周期延拓的函数满足狄利克雷条件,

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}2x\mathrm{d}x=\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}2x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n-1]$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}2x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

$$f(x)\sim\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n-1]\cos nx+\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx$$

$$\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n-1]\cos nx+\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx=\begin{cases}f(x) & ,x\neq(2k+1)\pi\\ \pi & ,x=(2k+1)\pi\end{cases},k\in\mathbb{Z}$$