中山大学本科生期末考试

考试科目:《高等数学一 (II)》(A 卷)

学年学期: **2014–2015** 学年第 **2** 学期　　姓　　名: ____________

学　院/系: 数学学院　　学　　号: ____________

考试方式: 闭卷　　年级专业: ____________

考试时长: **120** 分钟　　班　　别: ____________

警示　《中山大学授予学士学位工作细则》第八条:“考试作弊者, 不授予学士学位.”

以下为试题区域, 共 2 道大题, 总分 100 分, 考生请在答题纸上作答

一、按要求解答下列各题，并写出必要的步骤。(共 9 小题，每小题 10 分，共 90 分)

1. (10 分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{3^n}x^{2n-1}$ 的收敛域及和函数

解析　令 $u_n(x)=\dfrac{2n-1}{3^n}x^{2n-1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{|x^{2n+1}|}{3^{n+1}}(2n+1)}{\frac{|x^{2n-1}|}{2^n}(2n-1)}=\dfrac{x^2}{3}$

当 $\dfrac{x^2}{3}<1$ 即 $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$ 级数收敛

当 $\dfrac{x^2}{3}>1$ 即 $x<-\sqrt{3}$ 或 $x>\sqrt{3}$ 级数发散

$x=\pm\sqrt{3}$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{3^n}(\pm\sqrt{3})^{2n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\pm\dfrac{2n-1}{\sqrt{3}}$ 发散,

收敛域为 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$

设 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}x^{2n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}x^{2n-2}=xS(x)$

$$\begin{aligned}\int_0^x S(x)\mathrm{d}x &= \int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}x^{2n-2}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{3^n}\\ &= \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{3}\right)^n\\ &= \frac{1}{x}\times\frac{\frac{x^2}{3}}{1-\frac{x^2}{3}}\\ &= \frac{x}{3-x^2}\end{aligned}$$

$$S(x)=\left(\frac{x}{3-x^2}\right)'=\frac{3+x^2}{(3-x^2)^2}$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}x^{2n-1}=\frac{(3+x^2)x}{(3-x^2)^2}\quad(-\sqrt{3},\sqrt{3})$

2. (10 分) 设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)\begin{cases}x, & -\pi\le x<0\\ 0, & 0\le x<\pi\end{cases}$$

求 $f(x)$ 的傅氏级数及其和函数

解析

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0}=\frac{1}{\pi}\left(0-\frac{\pi^2}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-x}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{x}\int_{-\pi}^{0}x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{0}x\mathrm{d}\sin nx\\ &= \frac{1}{n\pi}\left[\pi\sin nx\mid_{-\pi}^{0}-\int_{-\pi}^{0}\sin nx\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{n^2\pi}[1-(-1)^n]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{0}\pi\mathrm{d}\cos nx\\ &= -\frac{1}{n\pi}\left[x\cos x\mid_{-\pi}^{0}-\int_{-\pi}^{0}\cos nx\mathrm{d}x\right]=\frac{(-1)^{n+1}}{n}\end{aligned}$$

$$f(x)=-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right]=\begin{cases}f(x), & (2k-1)\pi<x<(2k+1)\pi\\ -\frac{\pi}{2}, & x=(2k-1)\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots\end{cases}$$

3. (10 分) 证明 $f(y)=\int_0^{+\infty} 2^{-xy}\mathrm{d}x$ 在 $0\le a\le y\le b$ 一致收敛，并计算积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{2^{-2x}-2^{-3x}}{x}\mathrm{d}x$

解析 当 $x\in[0,+\infty), y\in[a,b],\quad 2^{-xy}\le 2^{-ax}$

而 $\int_0^{+\infty} 2^{-ax}\mathrm{d}x=\left.\frac{-2^{-ax}}{a\ln 2}\right|_0^{+\infty}=\frac{1}{a\ln 2}$ 收敛

从而 $\int_0^{+\infty} 2^{-xy}\mathrm{d}x$ 在 $y\in[a,b]$ 一致收敛，而 2^{-xy} 连续。

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{2^{-2x}-2^{-3x}}{x}\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_2^3 2^{-xy}\ln 2\mathrm{d}y=\int_2^3\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}2^{-xy}\ln 2\mathrm{d}x\\&=\int_2^3\frac{1}{y}[2^{-xy}]_0^{+\infty}\mathrm{d}y=\int_2^3\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\ln\frac{3}{2}\end{aligned}$$

4. (10 分) 讨论积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$ 的敛散性

解析

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}x^{\frac{2}{3}}=0\qquad x=0$ 不是瑕点，$\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$ 是正常积分，收敛

当 $x\in[1,+\infty)$ 时候，$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ 单调递减，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=0$

$$\left|\int_1^A\sin x\mathrm{d}x\right|=|\cos A-\cos 1|\le 2$$

由狄利克雷判别法，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$ 收敛

所以 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$ 收敛

5. (10 分) 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)$ 在 $-l<x<l(l>0)$ 一致收敛；在 $-\infty<x<+\infty$ 不一致收敛。

解析 $\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)\le\frac{x^2}{n^2}\le\frac{l^2}{n^2}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{l^2}{n^2}$ 收敛

由 M 判别法，当 $x\in(-l,l)$ 时级数一致收敛

当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)=0$

而当取 $x_n=n$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{x_n^2}{n^2}\right)=\ln 2>0$

即 $\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)\not\rightrightarrows 0$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 不一致收敛

6. (10 分) 计算积分 $I = \iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)(x^2+y^2)\mathrm{d}V$， Ω 由 $x^2+y^2+z^2=2$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围且 $z \geq 0$ 的部分

解析

$$\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)(x^2+y^2)\mathrm{d}V \\
&= \iiint\limits_{\Omega} z(x^2+y^2)\mathrm{d}V \\
&= \iiint\limits_{\Omega} r^2 \times z \times r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r\int_r^{\sqrt{2-r^2}} z\mathrm{d}z \\
&= 2\pi\int_0^1 r^3\frac{2-r^2-r^2}{2}\mathrm{d}r \\
&= \pi\int_0^1(2r^3-2r^5)\mathrm{d}r \\
&= \pi\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{6}\right) \\
&= \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

7. (10 分) 计算积分 $I = \oint_{L^+}(y-z+x)\mathrm{d}x+(z-x+y)\mathrm{d}y+(x-y+z)\mathrm{d}z$, 其中 L^+ 为椭圆周：$x^2+y^2=1, x+z=1$，沿顺时针方向。

答案 4π

解析 由斯托克斯公式得

$$\begin{aligned}
I &= \oint_{L^+}(y-z+x)\mathrm{d}x+(z-x+y)\mathrm{d}y+(x-y+z)\mathrm{d}z \\
&= \iint_{\pi}\begin{vmatrix} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y-z+x & z-x+y & x-y+z \end{vmatrix} \\
&= \iint_{\pi} -2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - 2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_D (-2,-2,-2)(-1,0,-1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_D 4\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= 4\pi
\end{aligned}$$

8. (10 分) 用常数变易法求微分方程 $y''+3y'+2y=\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}$ 的通解

解析

$$y''+3y'+2y=\frac{1}{e^x+1}$$

$$\lambda^2+3\lambda+2=0$$

$$(\lambda+2)(\lambda+1)=0 \quad \lambda_1=-1,\ \lambda_2=-2$$

$\therefore$ 对应的齐次方程的解为 $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$

$$\therefore y=c_1(x)e^{-x}+c_2(x)e^{-2x}$$

$$c_1'(x)e^{-x}+c_2'(x)e^{-2x}=0$$

$$-c_1'(x)e^{-x}-c_2'(x)\cdot 2e^{-2x}=\frac{1}{e^x+1}$$

$$-c_2'(x)e^{-2x}=\frac{1}{e^x+1}$$

$$\therefore c_2'(x)=\frac{-e^{2x}}{e^x+1} \Rightarrow c_2(x)=\ln\left(e^x+1\right)-e^x+c_2$$

$$c_1'(x)=\frac{e^x}{e^x+1} \Rightarrow c_1(x)=\ln\left(e^x+1\right)+c_1$$

$$y=e^{-x}\cdot\ln\left(e^x+1\right)+c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}-e^{-x}+\ln\left(e^x+1\right)\cdot e^{-2x}$$

$$y=\left(c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}\right)+\ln\left(e^x+1\right)\cdot\left(e^{-x}+e^{-2x}\right)-e^{-x}$$

9. (10 分) 求微分方程 $y'=\cos(x+y+1)$ 的通解

解析 令 $z=x+y+1, y=z-x-1$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-1=\cos z$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{1+\cos z}=\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{1+2\cos^2\frac{z}{2}-1}=\mathrm{d}x$$

$$\int\frac{\mathrm{d}\frac{z}{2}}{\cos^2\frac{z}{2}}=\int\mathrm{d}x$$

$$\tan\frac{z}{2}=x+C$$

$$\tan\frac{x+y+1}{2}=x+C$$

二、按要求答下列各题，并写出必要的步骤。(共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分)

1. (5 分) 判断级数 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(\ln n)^{\frac{1}{2}}}$ 的敛散性，若收敛请判断是绝对收敛还是条件收敛

解析 $u_n=\dfrac{1}{n(\ln n)^{\frac{1}{2}}}$ 单调递减，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^{\frac{1}{2}}}=0$

由莱布尼兹判别法，级数收敛

令 $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^{\frac{1}{2}}}$

而 $\int_3^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_3^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{\ln x}\ |_3^{+\infty}$ 发散,
从而级数条件收敛

2. (5 分) 证明: 若各项是关于 x 的单调函数的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 的端点绝对收敛，则此函数项级数在闭区间 $[a,b]$ 上绝对收敛并一致收敛。

解析 由条件 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left|\varphi_n(a)\right|+\left|\varphi_n(b)\right|\right]$ 收敛。
又 $\varphi_n(x)$ 单调。故 $\max\limits_{x\in[a,b]}\left|\varphi_n(x)\right| = \max\left\{\left|\varphi_n(a)\right|,\left|\varphi_n(b)\right|\right\}$
对 $\forall x\in[a,b], \left|\varphi_n(x)\right| \le \left|\varphi_n(a)\right|+\left|\varphi_n(b)\right|$
由 M-判别法 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ 在 $[a,b]$ 绝对且一致收敛