一、1. $-\frac{16}{27}$ 2. $-\frac{1}{6}A+\frac{1}{2}E$ 3. 线性相关 4. 55 5. 2

二、解：

$$(A\,|\,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&-3&1&0&0\\1&2&-2&0&1&0\\-1&3&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_2]{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-2&0&1&0\\2&1&-3&1&0&0\\0&5&0&0&1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{5}r_3]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-2&0&1&0\\0&-3&1&1&-2&0\\0&1&0&0&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\end{array}\right)\xrightarrow{r_2+3r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&-2&0&1&0\\0&0&1&1&-\frac{7}{5}&\frac{3}{5}\\0&1&0&0&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_1+2r_2-2r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-\frac{11}{5}&\frac{4}{5}\\0&1&0&0&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\0&0&1&1&-\frac{7}{5}&\frac{3}{5}\end{array}\right)\qquad\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-\frac{11}{5}&\frac{4}{5}\\0&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\1&-\frac{7}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}$$

三、解：

$$\begin{pmatrix}-1&1&0&1&2\\-1&2&1&3&6\\0&1&1&2&4\\0&-1&-1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{pmatrix}-1&1&0&1&2\\0&1&1&2&4\\0&1&1&2&4\\0&-1&-1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}-1&1&0&1&2\\0&1&1&2&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&3&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3\leftrightarrow r_4,\ -r_1]{\frac{1}{3}r_4}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1&-2\\0&1&1&2&4\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1+r_2-r_3}\begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&1&0&2\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

~~故~~是秩为3，且 a_1, a_2, a_4 为一组最大无关组

设 $a_3=k_1a_1+k_2a_2+k_3a_4$，解得 $k_1=1, k_2=1, k_3=0$

设 $a_5=b_1a_1+b_2a_2+b_3a_4$，解得 $b_1=1, b_2=2, b_3=1$

$\therefore a_3=a_1+a_2$，$a_5=a_1+2a_2+a_4$

$\therefore$ 最大无关组为 $\{a_1, a_2, a_4\}$，$a_3=a_1+a_2$，$a_5=a_1+2a_2+a_4$

四、解：增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & \vdots & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & \vdots & 3 \\ 3 & -1 & -s & 15 & \vdots & 3 \\ 1 & -5 & -10 & 12 & \vdots & t \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-r_1}]{r_2-r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & -s-6 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 9 & t-1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4+3r_2]{r_3+2r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -s+2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & t+5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-\frac{2}{3}r_4 \\ \frac{1}{3}r_4}]{\frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -s+2 & 0 & \frac{2}{3}-\frac{2}{3}t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{t}{3}+\frac{5}{3} \end{array}\right)$$

$\therefore$ 当 $-s+2=0$ 且 $\frac{2}{3}-\frac{2}{3}t \neq 0$ 时，即 $s=2$ 且 $t \neq 1$ 时，方程无解

当 $-s+2 \neq 0$ 时，即 $s \neq 2$ 时，方程有唯一解

当 $-s+2=0$ 且 $\frac{2}{3}-\frac{2}{3}t=0$ 时，即 $s=2$ 且 $t=1$ 时，方程有无穷解

此时增广矩阵化为

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_4]{r_1-r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2+r_3]{r_1-4r_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\therefore x_1=-8$，$x_4=2$，令 $x_3=c$，则 $x_2=3-2c$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3-2c \\ c \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

五、解：特征方程 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -2 & \lambda-1 & -x \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \lambda-1 & -x \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$

$= (-1)(\lambda-1) + \lambda^2(\lambda-1) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$

$\therefore$ 特征值有 $\lambda=-1$ 与 $\lambda=1$（二重）

~~当 $\lambda=-1$ 时，$(-E-A)$~~ $= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -x \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-2r_1]{r_3-r_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -x+2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ~~秩为2~~

~~故特征空间维数为 $3-2=1$，与 $\lambda=-1$ 的重数相等~~

A可对角化 $\Leftrightarrow (A-E)X=0$ 的基础解系含2个向量

$\Leftrightarrow R(A-E)=3-2=1$

当$\lambda=1$时，$(E-A)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-2&0&-x\\-1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+2r_1]{r_3+r_1}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&-x-2\\0&0&0\end{pmatrix}$

当$-x-2=0$时 即$x=-2$时，秩为1，特征空间维数为2，等于$\lambda=1$的~~板~~重数

当$x=-2$时 矩阵A可对角化

六、证明 设$x_1b_1+x_2b_2+x_3b_3=0$ (2分)

即 $x_1a_1+x_2(a_1+a_2)+x_3(a_1+a_1+a_3)=0$

即 $(x_1+x_2+x_3)a_1+(x_2+x_3)a_2+x_3a_3=0$ (4分)

$\because a_1\ a_2\ a_3$线性无关

$\therefore x_1+x_2+x_3=0\quad x_2+x_3=0,\quad x_3=0$ (6分)

解得 $x_1=x_2=x_3=0$ (8分)

$\therefore b_1\ b_2\ b_3$线性无关

得分

七、（共 1 小题，每小题 8 分，共 8 分）

设a_1，a_2，a_3为4元非齐次线性方程组$Ax=b$的3个解向量，且$R(A)=3$，

$a_1+a_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$，$a_2+a_3=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，求该方程组的通解。

$n-R(A)=4-3=1$

则 $Ax=0$ 的基础解系中含1个向量 （2分）

且 $(a_1+a_2)-(a_2+a_3)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为 $Ax=0$ 的解

则 $Ax=0$ 的一个基础解系为$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ （4分）

$\frac{1}{2}(a_1+a_2)=\begin{pmatrix}1\\\frac{3}{2}\\2\\\frac{5}{2}\end{pmatrix}$ 为 $Ax=b$ 的解 （6分）

或 $\frac{1}{2}(a_2+a_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\\frac{3}{2}\\2\end{pmatrix}$ 为 $Ax=b$ 的解

或者其它形式的解，这里结果不唯一

则该方程组的通解为

$x=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\\frac{3}{2}\\2\\\frac{5}{2}\end{pmatrix}$ $c\in R$ （8分）

得分

九、（共 1 小题，每小题 13 分，共 13 分）

设矩阵$A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$，求正交矩阵$P$和对角阵$\Lambda$，使得$P^{-1}AP=\Lambda$。

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda&2&2\\2&3-\lambda&2\\2&2&3-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7-\lambda&2&2\\7-\lambda&3-\lambda&2\\7-\lambda&2&3-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7-\lambda&2&2\\0&1-\lambda&0\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(7-\lambda)(1-\lambda)^2$$

$\lambda_1=\lambda_2=1 \quad \lambda_3=7$ (3分)

$\lambda_1=\lambda_2=1$

$$A-E=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \qquad x_1=-x_2-x_3$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$p_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \quad p_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$ (5分)

$$\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \beta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}=+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$ (7分)

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \gamma_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$ 1+1+4 (9分)

$\lambda_3=7$

$$A-7E=\begin{pmatrix}-4&2&2\\2&-4&2\\2&2&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&2&-4\\0&-6&6\\0&6&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$x_1=x_3$

$x_2=x_3$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad p_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$ (10分)

$$\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$ (11分)

$$P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$ (12分)

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&7\end{pmatrix}$$ (13分)