中山大学本科生期中考试

考试科目：《线性代数》

学年学期：2020 学年第 1 学期　　　　学院/系：数学学院

考试方式：闭卷　　　　考试时长：100 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
分数	12	8	10	10	10	10	10	10	10	10	100
签名											

警示《中山大学授予学士学位工作细则》第八条："考试作弊者，不授予学士学位。"

------- 以下为试题区域，共十道大题，总分 100 分。学生请在试卷上作答 -------

得分
12

一、填空题（共 4 小题，每题 3 分，共 12 分）

1. $a_{1i}a_{32}a_{4k}a_{25}a_{53}$若是五阶行列式中带负号的一项，则$i=$ __4__，$k=$ __~~4~~1__.

2. 设$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$D_1=\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12}-4a_{11} & 2a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22}-4a_{21} & 2a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{32}-4a_{31} & 2a_{33} \end{vmatrix}$，

则$D_1=$ __~~2D~~ 8D__（用D表示）.

3. 行列式$\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix}\neq 0$的充分必要条件是 __k≠3或k≠-1__.

4. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1$设，则$\begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 \\ b+3 & 0 & 3 \\ c+5 & 1 & 3 \end{vmatrix}=$ __-1__.

得分
8

二、计算行列式（共 1 小题，每小题 8 分，共 8 分）

求解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix} = 0.$

$\cancel{\begin{vmatrix} 3 & x \\ 9 & x^2 \end{vmatrix}}$

解：$\cancel{D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix} = D^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & x \\ 1 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 0}$

~~即~~ $\cancel{3x^2 - 9x = 0}$

$\cancel{x = 0}$ ~~或~~ $\cancel{x = 3}$.

由定理可知 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ x & x^2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & x^2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & x \end{vmatrix}$

∴原方程：$3x^2 - 9x - x^2 + 9 + x - 3 = 0$

$(x-3)(x-1) = 0$

$x = 1$ 或 $x = 3$.

得分
10

三、计算行列式（共 1 小题，每小题 10 分，共 10 分）

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

解：$D \xlongequal[c_2+5c_1]{c_3-c_4} \begin{vmatrix} 3 & 16 & -3 & 2 \\ -5 & -24 & 7 & -4 \\ 2 & 10 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[\cancel{c_2+10c_4}\ c_2-5c_3]{c_1-\frac{1}{3}c_4} \begin{vmatrix} \frac{7}{3} & 31 & -3 & 2 \\ -\frac{11}{3} & -59 & 7 & -4 \\ \frac{7}{3} & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1-\frac{7}{6}c_3}$

$\begin{vmatrix} \frac{35}{6} & 31 & -3 & 2 \\ -\frac{71}{6} & -59 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1-\frac{71}{59\times6}c_2} \begin{vmatrix} \frac{35}{6}-\frac{71\times31}{59\times6} & 31 & -3 & 2 \\ 0 & -59 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

$= \left(\frac{35}{6} - \frac{71\times31}{59\times6}\right) \times (-59) \times 2 \times 3 = 136.$

得分
10

四、计算行列式（共 1 小题，每小题 10 分，共 10 分）

$$D=\begin{vmatrix} 2020 & 2019 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ 2020 & 2019 & \cdots & 3 & 2 & 0 \\ 2020 & 2019 & \cdots & 3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \therefore & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2020 & 2019 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2020 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解：$D = 2020! \cdot (-1)^{\frac{2020\times 2019}{2}}$

$= 2020!$

得分
10

五、计算行列式（共 1 小题，每小题 10 分，共 10 分）

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{2020} \end{vmatrix}$$

解：$D \xlongequal[\cdots\ c_1-\frac{1}{2}c_2]{c_1-\frac{c_{2020}}{2020},\ c_1-\frac{c_{2019}}{2019}} \begin{vmatrix} 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{2020} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2020 \end{vmatrix}$

$= 2020!\left[2-\sum_{i=1}^{2020}\left(\frac{1}{n}\right)\right].$

得分
10

六、计算 n 阶行列式（共 1 小题，每小题 10 分，共 10 分）

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

解：$D_n \xlongequal[r_n-r_1]{r_2-r_1,\ r_3-r_1 \cdots} \begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & \cdots & a_n \\ -b & b & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & b & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ -b & 0 & 0 \cdots & b \end{vmatrix} \xlongequal[c_1+c_2]{c_1+c_n,\ c_1+c_{n-1}\cdots}$

$$\begin{vmatrix} a_1+b+a_2+\cdots+a_n & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & b & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & b \end{vmatrix} = (a_1+a_2+\cdots+a_n+b)\cdot b^{n-1}.$$

得分
10

七、计算 $2n$ 阶行列式（共 1 小题，每小题 10 分，共 10 分）

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_1 & & & & & b_1 \\ & \ddots & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & a_n & b_n & & \\ & & b_n & a_n & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \ddots & \\ b_1 & & & & & a_1 \end{vmatrix}$$，其中未写出的元素皆为 0

若 $a_1, a_2 \cdots a_n$ 均为 0，则 $D_{2n}=0$

解：若 $a_1, a_2 \cdots a_n$ 均不为 0，则：

$D_{2n} \xlongequal[c_n-\frac{b_n}{a_n}c_{n+1}]{c_1-\frac{b_1}{a_n}c_{2n},\ c_2-\frac{b_2}{a_2}c_{2n-1}\cdots} \begin{vmatrix} a_1-\frac{b_1^2}{a_1} & & & & & b_1 \\ & a_2-\frac{b_2^2}{a_2} & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & a_n-\frac{b_n^2}{a_n} & b_n & & \\ & & 0 & a_n & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \ddots & \\ 0 & & & & & a_1 \end{vmatrix}$

$= (a_1-\frac{b_1^2}{a_1})(a_2-\frac{b_2^2}{a_2})\cdots(a_n-\frac{b_n^2}{a_n})\, a_n\cdot a_{n-1}\cdots a_1$

$= \cancel{\sum_{i=1}^{n}(a_n^2-b_n^2)} \quad = (a_1^2-b_1^2)(a_2^2-b_2^2)\cdots(a_n^2-b_n^2).$

装 订 密 封 线

课室名称：　座位号：　任课教师：　姓名：　专业：　学号：　年级：　学院：

装　订　密　封　线

得分
10

八、（共 1 小题，每小题 10 分，共 10 分）

设$f(x)=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & x \\ 2 & x & 3 & 3 \\ -7 & 10 & 4 & x \\ 1 & -7 & 1 & x \end{vmatrix}$，求$f(x)$中$x^3$的系数.

解：可得仅 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，$-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$ 两项含有 x^3

$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=4x^3$

$-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}=-x^3$

故 $f(x)$ 中 x^3 的系数为 3.

得分
10

九、（共 1 小题，每小题 10 分，共 10 分）

$$证明D=\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}=0.$$

$$解：D \xlongequal[C_4-C_1]{C_2-C_1,\ C_3-C_1} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix} \xlongequal{C_3-C_2}$$

$$\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2a+3 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 2b+3 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 2c+3 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 2d+3 & 6d+9 \end{vmatrix}$$

$\because C_4=3C_3$

$\therefore$ 行列式 $D=0$. 证毕.

得分
10

十、(共 1 小题，每小题 10 分，共 10 分)

设 n 阶行列式 D 中零元素的个数大于 n^2-n 个，证明 $D=0$.

解：∵ n阶行列式D中零元素的个数大于 n^2-n 个

∴ n阶行列式D中非零元素的个数小于 n 个

~~∴ 每行或每列都~~

∴ 至少有一行或一列的元素均为0

则 $D=0$. 证毕.