珠海校区 2009 年度第一学期《线性代数》期中考试卷

姓名：　　　　专业：　　　　学号：　　　　成绩：

一，填空题（每题 3 分，共 24 分）

1. 在 5 阶行列式中，含有 $a_{13}a_{34}a_{51}$ 且带有负号的项是________________

2. 设 A 是 3 阶方阵，$|A| = 1/3$，则 $|(3A)^{-1} + 2A^*| =$ __________________

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$ _______ ； 4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & c & b & a \\ x^2 & c^2 & b^2 & a^2 \\ x^3 & c^3 & b^3 & a^3 \end{vmatrix} =$ _____________ ;

5 . 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，则 $AB - BA^T =$ _________ ;

6. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩为 2 ,则 k = _________ ;

7. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$ ______ ; 8. 若 A = diag(1 ,2 ,3 ,4) , 则 $A^{-1} =$ __________ ;

二. 判断题（每题 2 分，共 10 分 ）

1. 任一 n 阶对角阵必可与同阶的方阵交换。 （　　）

2. n 阶行列式中副对角线上元素的乘积 $a_{n1}a_{n-1,2}\ldots a_{1n}$ 总是带负号的 （　　）

3. 若 A 为 n 阶方阵 ， 则 $(A^*)^T = (A^T)^*$ （　　）

4. 设 A , B 为 n 阶方阵 ，则有 $(AB)^3 = A^3B^3$ （　　）

5. 设 A 与 B 为同型矩阵 ，则 $A \sim B$ 的充要条件是 R（A）=R (B) (　　)

三,计算下列行列式(每题 8 分,共 16 分)

$$D_4 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

四. 已知 $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 且 $AB = A - 2B$，求 B .

五. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩及一个最高阶非零子式(8 分)

六. 设 A 为 n 阶方阵, 且 $A^3 + 2A - E = 0$. 证明 A + 2E 可逆 ,并求$(A + 2E)^{-1}$. (8 分)

七. 设 $P^{-1}AP = K$, $B = A + E$, 其中 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

求 $f(B) = B^2(B^2+B+2E)$.(10 分)

八. 设 $\begin{cases} (1-k)x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + (4-k)x_2 - 4x_3 = 2 \\ -2x_1 - 4x_2 + (4-k)x_3 = -k-2 \end{cases}$,问 k 为何值时,此方程组有惟一解,

无解,或有无穷多解 ? 并在有无穷多解时求其通解. (10 分).

答案:

一. 1. $-a_{13}a_{22}a_{34}a_{45}a_{51}$; 2. 3 ;

3 . -18 ; 4. (c-x)(b-x)(a-x)(a-b)(b-c)(a-c) ;

5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$; 6 . 2 ;

7. 5 ; 8. diag(1 ,1⁄2 ,1⁄3 , 1⁄4) ;

二. 1 . wrong 2 . wrong

3. right 4. Wrong 5.right

5.解释: 当 A~B 时, 自然有 R(A) = R(B) , 充分性得以证明;

当 R(A) = R(B) 时, 设 A , B 的秩为 r .则: A B 的标准型为

$A \sim \begin{pmatrix} Er & O_1 \\ O_2 & O_3 \end{pmatrix}$ $B \sim \begin{pmatrix} Er & O_4 \\ O_5 & O_6 \end{pmatrix}$ (标准型的转换详见课本 61 页)

因为 A 与 B 为同型矩阵, 所以 $O_1 = O_4$ $O_2 = O_5$ $O_3 = O_6$;

所以, 容易看出此时 A = B. 必要性得以证明 .

三. $D_4 = 48$; Dn: 对 Dn 以第一列拆分 . 可得: $Dn = -D_{n-2}$,

又可知 D1 = 0 ; D2 = -1 . 由数学归纳法可得:

$Dn = (-1)^{(n-2)/2}D2 = (-1)^{n/2}$ 当 n 为偶数时 ; Dn = 0 ,当 n 为奇数时 .

四. 具体做法,回顾课本第二章相关例题.

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 6 & -2 \\ 10 & 7 & -2 \\ -12 & -8 & 3 \end{pmatrix}$$

五. 做法 ,运用行变换. 得 $R(A)=3$;

最高阶非零子式可以是: $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

六 . 原式子可以转化为: $(A+2E)(A^2-2A+6E)-13E=0$.

即 . 下面的都知道了吧. 自己说下.

七 . $f(B)=\begin{pmatrix} -24 & 28 \\ -56 & 60 \end{pmatrix}$ ，具体做法.参照课本第 45~46 页.

八 . 行等变换后观察.

得: 1. $R(A)=R(A,b)=3$，即得最终 k 不等于 0 且 k 不等于 9 时,有惟一解.

2. $R(A)<R(A,b)$，即得最终 $k=9$ 时, 方程组无解 ,

3. $R(A)=R(A,b)<3$， 方程组有无数多个解 .

此时,通解为

$$X = c_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

具体做法.参照课本第 75~76 页

PS ：没有详细解答 ，有不懂的要自动去问同学哈. 把不懂的补上去,后面的内容挺烦人的.