$$|A|\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A\text{可逆} \\ r(A)=n \\ A\text{的列（行）向量线性无关} \\ A\text{的特征值全不为}0 \\ Ax=o\text{只有零解} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\neq o，Ax\neq o \\ \forall \beta\in \mathbf{R}^n, Ax=\beta\text{总有唯一解} \\ A^TA\text{是正定矩阵} \\ A\cong E \\ A=p_1p_2\cdots p_s \quad p_i\text{是初等阵} \\ \text{存在}n\text{阶矩阵}B,\text{使得}AB=E \ \ \text{或} \ \ AB=E \end{cases}$$

注：全体 n 维实向量构成的集合 $\mathbf{R}^n$ 叫做 n 维向量空间.

$$|A|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} A\text{不可逆} \\ r(A)<n \\ A\text{的列（行）向量线性相关} \\ 0\text{是}A\text{的特征值} \\ Ax=o\text{有非零解},\text{其基础解系即为}A\text{关于}\lambda=0\text{的特征向量} \end{cases}$$

注 $$|aE+bA|=o \Leftrightarrow \begin{cases} r(aE+bA)<n \\ (aE+bA)x=o\text{有非零解} \\ \lambda=-\frac{a}{b} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{向量组等价} \\ \text{矩阵等价}(\cong) \\ \text{矩阵相似}(\square) \\ \text{矩阵合同}(\square) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{具有}} \text{反身性、对称性、传递性}$$

√ 关于 $e_1,e_2,\cdots,e_n$：

①称为□ ^{n} 的标准基，□ ^{n} 中的自然基，单位坐标向量 $p_{\text{教材}87}$；

② $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性无关；

③ $|e_1,e_2,\cdots,e_n|=1$；

④ $\mathrm{tr}E=n$；

⑤任意一个 n 维向量都可以用 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性表示.

行列式的定义 $D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$

√ 行列式的计算：

①行列式按行（列）展开定理：行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和.

推论：行列式某一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零.

②若 A与B 都是方阵（不必同阶），则 $\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & * \\ O & B \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix}=|A||B|$，$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} * & A \\ B & O \end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||B|$ （拉普拉斯展开式）

③上三角、下三角、主对角行列式等于主对角线上元素的乘积.

④关于副对角线：$\begin{vmatrix} * & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \mathinner{\kern1mu\raise1pt{.}\kern2mu\raise4pt{.}\kern2mu\raise7pt{.}} & & \\ a_{n1} & & & O \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} O & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & \\ & \mathinner{\kern1mu\raise1pt{.}\kern2mu\raise4pt{.}\kern2mu\raise7pt{.}} & & \\ a_{n1} & & & O \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n}\ldots a_{n1}$ （即：所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积的代数和）

⑤范德蒙德行列式：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}\left(x_i-x_j\right)$

矩阵的定义 由 $m\times n$ 个数排成的 m 行 n 列的表 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 称为 $m\times n$ 矩阵. 记作：$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ 或 $A_{m\times n}$

伴随矩阵 $A^*=\left(A_{ij}\right)^T=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$，$A_{ij}$ 为 $|A|$ 中各个元素的代数余子式.

√ 逆矩阵的求法：

① $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$　　㊟：$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$　　主⋯换位
副⋯变号

② $(A\vdots E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\vdots A^{-1})$

③ $\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & & \\ & \frac{1}{a_2} & \\ & & \frac{1}{a_3} \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} & & a_1 \\ & a_2 & \\ a_3 & & \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} & & \frac{1}{a_3} \\ & \frac{1}{a_2} & \\ \frac{1}{a_1} & & \end{pmatrix}$

√ 方阵的幂的性质：$A^mA^n=A^{m+n}$ $\qquad$ $(A^m)^n=(A)^{mn}$

√ 设 $A_{m\times n},B_{n\times s}$，$A$ 的列向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，$B$ 的列向量为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$，

则 $AB=C_{m\times s}\Leftrightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}=(c_1,c_2,\cdots,c_s)\Leftrightarrow A\beta_i=c_i$ ，$(i=1,2,\cdots,s)\Leftrightarrow\beta_i$ 为

$Ax=c_i$ 的解 $\Leftrightarrow A(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_s)=(c_1,c_2,\cdots,c_s)\Leftrightarrow c_1,c_2,\cdots,c_s$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示. 即：C 的列向量能由 A 的列向量线性表示，B 为系数矩阵.

同理：C 的行向量能由 B 的行向量线性表示，A^T 为系数矩阵.

即：$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} a_{11}\beta_1+a_{12}\beta_2+\cdots+a_{1n}\beta_2=c_1 \\ a_{21}\beta_1+a_{22}\beta_2+\cdots+a_{2n}\beta_2=c_2 \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_{m1}\beta_1+a_{m2}\beta_2+\cdots+a_{mn}\beta_2=c_m \end{cases}$

√ 用对角矩阵 Λ 左 乘一个矩阵, 相当于用 Λ 的对角线上的各元素依次乘此矩阵的 行 向量；

用对角矩阵 Λ 右 乘一个矩阵, 相当于用 Λ 的对角线上的各元素依次乘此矩阵的 列 向量.

√ 两个同阶对角矩阵相乘只用把对角线上的对应元素相乘.

√ 分块矩阵的转置矩阵：$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}$

分块矩阵的逆矩阵：$\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} & A \\ B & \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} & B^{-1} \\ A^{-1} & \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & A^{-1}CB^{-1} \\ O & B \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B \end{pmatrix}$

分块对角阵相乘：$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \\ & A_{22} \end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} B_{11} & \\ & B_{22} \end{pmatrix}\Rightarrow AB=\begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & \\ & A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$，$A^n=\begin{pmatrix} A_{11}^n & \\ & A_{22}^n \end{pmatrix}$

分块对角阵的伴随矩阵：$\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} BA^* & \\ & AB^* \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} & A \\ B & \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} & (-1)^{mn}|A|B^* \\ (-1)^{mn}|B|A^* & \end{pmatrix}$

√ 矩阵方程的解法（$|A| \neq 0$）：设法化成（I）$AX = B$ 或 （II）$XA = B$

（I）的解法：构造 $(A \vdots B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \vdots X)$

（II）的解法：将等式两边转置化为 $A^T X^T = B^T$，

用（I）的方法求出 X^T，再转置得 X

① 零向量是任何向量的线性组合, 零向量与任何同维实向量正交.

② 单个零向量线性相关；单个非零向量线性无关.

③ 部分相关, 整体必相关；整体无关, 部分必无关. （向量个数变动）

④ 原向量组无关, 接长向量组无关；接长向量组相关, 原向量组相关. （向量维数变动）

⑤ 两个向量线性相关 $\Leftrightarrow$ 对应元素成比例；两两正交的非零向量组线性无关 $p_{\text{教材}114}$.

⑥ 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 中任一向量 α_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 都是此向量组的线性组合.

⑦ 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 向量组中至少有一个向量可由其余 $n-1$ 个向量线性表示.

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 向量组中每一个向量 α_i 都不能由其余 $n-1$ 个向量线性表示.

⑧ m 维列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow r(A) < n$；

m 维列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow r(A) = n$.

⑨ 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta$ 线性相关, 则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示, 且表示法唯一.

⑩ 矩阵的行向量组的秩＝列向量组的秩＝矩阵的秩. 行阶梯形矩阵的秩等于它的非零行的个数.

$\boxed{\text{行阶梯形矩阵}}$ 可画出一条阶梯线，线的下方全为0；每个台阶只有一行，台阶数即是非零行的行数，阶梯线的竖线后面的第一个元素非零. 当非零行的第一个非零元为 1，且这些非零元所在列的其他元素都是0时，称为$\boxed{\text{行最简形矩阵}}$

⑪ 矩阵的行初等变换不改变矩阵的秩, 且不改变列向量间的线性关系；

矩阵的列初等变换不改变矩阵的秩, 且不改变行向量间的线性关系.

即：矩阵的初等变换不改变矩阵的秩.

√ 矩阵的初等变换和初等矩阵的关系：

对 A 施行一次初等行变换得到的矩阵, 等于用相应的初等矩阵左乘 A；

对 A 施行一次初等列变换得到的矩阵, 等于用相应的初等矩阵右乘 A.

矩阵的秩 如果矩阵 A 存在不为零的 r 阶子式，且任意 $r+1$ 阶子式均为零，则称矩阵 A 的秩为 r. 记作 $r(A)=r$

向量组的秩 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的极大无关组所含向量的个数，称为这个向量组的秩. 记作 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

矩阵等价 A 经过有限次初等变换化为 B. 记作：$A\cong B$

向量组等价 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 可以相互线性表示. 记作：$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\cong(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$

⑫ 矩阵 A 与 B 等价 $\Leftrightarrow PAQ=B$，P,Q 可逆 $\Leftrightarrow r(A)=r(B), A,B$ 为同型矩阵 $\not\Rightarrow A,B$ 作为向量组等价, 即：秩相等的向量组不一定等价.

矩阵 A 与 B 作为向量组等价 $\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\Rightarrow$

矩阵 A 与 B 等价.

⑬ 向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示 $\Leftrightarrow AX=B$ 有解

$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\Rightarrow r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\leqslant r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$.

⑭ 向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示, 且 $s>n$，则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性相关.

向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关, 且可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示, 则 $s\leqslant n$.

⑮ 向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示, 且 $r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, 则两向量组等价；

$p_{\text{教材94, 例10}}$

⑯ 任一向量组和它的极大无关组等价. 向量组的任意两个极大无关组等价.

⑰ 向量组的极大无关组不唯一，但极大无关组所含向量个数唯一确定.

⑱ 若两个线性无关的向量组等价, 则它们包含的向量个数相等.

⑲ 设 A 是 $m\times n$ 矩阵, 若 $r(A)=m$，A 的行向量线性无关；

若 $r(A)=n$，A 的列向量线性无关, 即：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

√ 矩阵的秩的性质：

① 若 $A\neq O\Leftrightarrow r(A)\geqslant 1$　　若 $A=O\Leftrightarrow r(A)=0$　　$0\leqslant r(A_{m\times n})\leqslant \min(m,n)$

② $r(A)=r(A^T)=r(A^TA)$　　$p_{教材101,\,例15}$

③ $r(kA)=r(A)$　　若$k\neq 0$

④ 若$A_{m\times n},B_{n\times s}$,若$r(AB)=0\Rightarrow\begin{cases}r(A)+r(B)\leq n\\ B\text{的列向量全部是}Ax=0\text{的解}\end{cases}$

⑤ $r(AB)\leqslant\min\{r(A),r(B)\}$

⑥ $\begin{matrix}\text{若}A\text{可逆}\Rightarrow r(AB)=r(B)\\ \text{若}B\text{可逆}\Rightarrow r(AB)=r(A)\end{matrix}$　　即：可逆矩阵不影响矩阵的秩.

⑦ 若$r(A_{m\times n})=n\begin{cases}\Leftrightarrow Ax=o\ \text{只有零解}\\ \Rightarrow\begin{cases}r(AB)=r(B)\\ A\text{在矩阵乘法中有左消去律}\begin{cases}AB=O\Rightarrow B=O\\ AB=AC\Rightarrow B=C\end{cases}\end{cases}\end{cases}$;

若$r(B_{n\times s})=n\Rightarrow\begin{cases}r(AB)=r(B)\\ B\text{在矩阵乘法中有右消去律.}\end{cases}$

⑧ 若$r(A)=r\Rightarrow A$与唯一的$\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}$等价，称$\begin{pmatrix}E_r&O\\O&O\end{pmatrix}$为矩阵$A$的等价标准型.

⑨ $r(A\pm B)\leqslant r(A)+r(B)$　　　$\max\{r(A),r(B)\}\leqslant r(A,B)\leqslant r(A)+r(B)$　　$p_{教材70}$

⑩ $r\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}=r(A)+r(B)$　　　$r\begin{pmatrix}A&C\\O&B\end{pmatrix}\neq r(A)+r(B)$

$$\beta\text{可由}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{线性表示}\Leftrightarrow Ax=\beta\text{有解}\Leftrightarrow r(A)=r(A\vdots\beta)\begin{cases} <n\left\langle\begin{array}{l}\Leftrightarrow Ax=\beta\text{有无穷多解}\xrightarrow{\text{当}A\text{为方阵时}}|A|=0\\ \Leftrightarrow\text{表示法不唯一}\\ \Rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{线性相关}\Leftrightarrow Ax=0\text{有非零解}\end{array}\right. \\ =n\left\langle\begin{array}{l}\Leftrightarrow Ax=\beta\text{有唯一组解}\xrightarrow{\text{当}A\text{为方阵时}}|A|\neq0\Rightarrow\text{克莱姆法则}\\ \Leftrightarrow\text{表示法唯一}\\ \Rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{线性无关}\Leftrightarrow Ax=o\text{只有零解}\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\beta\text{不可由}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\text{线性表示}\Leftrightarrow Ax=\beta\text{无解}\begin{cases}\Leftrightarrow r(A)\neq r(A\vdots\beta)\\ \Leftrightarrow r(A)<r(A\vdots\beta)\\ \Leftrightarrow r(A)+1=r(A\vdots\beta)\end{cases}$$

教材72

讲义87

注：
$$\left\langle\begin{array}{l}Ax=\beta\text{有无穷多解}\left\langle\begin{array}{c}\Rightarrow\\ \Leftarrow\!\!\!\!/\end{array}\right\rangle\text{其导出组有非零解}\\ Ax=\beta\text{有唯一解}\left\langle\begin{array}{c}\Rightarrow\\ \Leftarrow\!\!\!\!/\end{array}\right\rangle\text{其导出组只有零解}\end{array}\right.$$

$\boxed{\text{线性方程组的矩阵式}}$ $Ax=\beta$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{向量式}}$ $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$

$$\alpha_j=\begin{pmatrix}\alpha_{1j}\\\alpha_{2j}\\\vdots\\\alpha_{mj}\end{pmatrix},j=1,2,\cdots,n$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\beta$$

矩阵转置的性质：	$(A^T)^T=A$	$(AB)^T=B^TA^T$	$(kA)^T=kA^T$	$\lvert A^T\rvert=\lvert A\rvert$	$(A\pm B)^T=A^T\pm B^T$	$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$	$(A^T)^*=(A^*)^T$
矩阵可逆的性质：	$(A^{-1})^{-1}=A$	$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$	$(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$	$\lvert A^{-1}\rvert=\lvert A\rvert^{-1}$	$(A\pm B)^{-1}\neq A^{-1}\pm B^{-1}$	$(A^{-1})^k=(A^k)^{-1}=A^{-k}$	
伴随矩阵的性质：	$(A^*)^*=\lvert A\rvert^{n-2}A$	$(AB)^*=B^*A^*$	$(kA)^*=k^{n-1}A^*$	$\lvert A^*\rvert=\lvert A\rvert^{n-1}$	$(A\pm B)^*\neq A^*\pm B^*$	$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}=\frac{A}{\lvert A\rvert}$	$(A^k)^*=(A^*)^k$
$r(A^*)=\begin{cases}n & 若r(A)=n\\ 1 & 若r(A)=n-1\\ 0 & 若r(A)<n-1\end{cases}$		$\lvert AB\rvert=\lvert A\rvert\lvert B\rvert$	$\lvert kA\rvert=k^n\lvert A\rvert$	$\lvert A^k\rvert=\lvert A\rvert^k$	$\lvert A\pm B\rvert\neq\lvert A\rvert\pm\lvert B\rvert$	$AA^*=A^*A=\lvert A\rvert E$（无条件恒成立）	

$$\text{线性方程组解的性质：}\begin{cases}\left.\begin{array}{l}(1)\ \ \eta_1,\eta_2\text{是}Ax=o\text{的解},\eta_1+\eta_2\text{也是它的解}\\(2)\ \ \eta\text{是}Ax=o\text{的解},\text{对任意}k,k\eta\text{也是它的解}\\(3)\ \ \eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k\text{是}Ax=o\text{的解},\text{对任意}k\text{个常数}\\\qquad\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k,\ \ \lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2+\lambda_k\eta_k\text{也是它的解}\end{array}\right\}\text{齐次方程组}\\(4)\ \ \gamma\text{是}Ax=\beta\text{的解},\eta\text{是其导出组}Ax=o\text{的解},\gamma+\eta\text{是}Ax=\beta\text{的解}\\(5)\ \ \eta_1,\eta_2\text{是}Ax=\beta\text{的两个解},\eta_1-\eta_2\text{是其导出组}Ax=o\text{的解}\\(6)\ \ \eta_2\text{是}Ax=\beta\text{的解},\text{则}\eta_1\text{也是它的解}\Leftrightarrow\eta_1-\eta_2\text{是其导出组}Ax=o\text{的解}\\(7)\ \ \eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k\text{是}Ax=\beta\text{的解},\text{则}\\\qquad\qquad\lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2+\lambda_k\eta_k\text{也是}Ax=\beta\text{的解}\Leftrightarrow\lambda_1+\lambda_2+\lambda_k=1\\\qquad\qquad\lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2+\lambda_k\eta_k\text{是}Ax=0\text{的解}\Leftrightarrow\lambda_1+\lambda_2+\lambda_k=0\end{cases}$$

√ 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, 若 $r(A)=m\Rightarrow r(A)=r(A\vdots\beta)\Rightarrow Ax=\beta$ 一定有解，

当 $m<n$ 时, 一定不是唯一解 $\Rightarrow\dfrac{\text{方程个数}}{\text{向量维数}}<\dfrac{\text{未知数的个数}}{\text{向量个数}}$, 则该向量组线性相关.

m 是 $r(A)\text{和}r(A\vdots\beta)$ 的上限.

√ 判断 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 是 $Ax=o$ 的基础解系的条件：

① $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 线性无关；

② $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 都是 $Ax=o$ 的解；

③ $s=n-r(A)=\text{每个解向量中自由未知量的个数}$.

√ 一个齐次线性方程组的基础解系不唯一.

√ 若 η^* 是 $Ax=\beta$ 的一个解， $\xi_1,\xi,\cdots,\xi_s$ 是 $Ax=o$ 的一个解 $\Rightarrow\xi_1,\xi,\cdots,\xi_s,\eta^*$ 线性无关

√ $Ax=o$ 与 $Bx=o$ 同解（ A,B 列向量个数相同）, 则：

① 它们的极大无关组相对应, 从而秩相等；

② 它们对应的部分组有一样的线性相关性；

③ 它们有相同的内在线性关系.

√ 两个齐次线性线性方程组 $Ax=o$ 与 $Bx=o$ 同解 $\Leftrightarrow r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=r(A)=r(B)$.

√ 两个非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 与 $Bx=\gamma$ 都有解，并且同解 $\Leftrightarrow r\begin{pmatrix}A\vdots\beta\\B\vdots\gamma\end{pmatrix}=r(A)=r(B)$.

√ 矩阵 $A_{m\times n}$ 与 $B_{l\times n}$ 的行向量组等价 $\Leftrightarrow$ 齐次方程组 $Ax=o$ 与 $Bx=o$ 同解 $\Leftrightarrow$ $PA=B$（左乘可逆矩阵 P）； $p_{教材101}$

矩阵 $A_{m\times n}$ 与 $B_{l\times n}$ 的列向量组等价 $\Leftrightarrow$ $AQ=B$（右乘可逆矩阵 Q）.

√ 关于公共解的三中处理办法：

① 把(I)与(II)联立起来求解；

② 通过(I)与(II)各自的通解，找出公共解；

当(I)与(II)都是齐次线性方程组时，设 η_1,η_2,η_3 是(I)的基础解系， η_4,η_5 是(II)的基础解系，则 (I)与(II)有公共解 $\Leftrightarrow$ 基础解系个数少的通解可由另一个方程组的基础解系线性表示.

即：$r(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=r(\eta_1,\eta_2,\eta_3\vdots c_1\eta_4+c_2\eta_5)$

当(I)与(II)都是非齐次线性方程组时，设 $\xi_1+c_1\eta_1+c_2\eta_2$ 是(I)的通解， $\xi_2+c_3\eta_3$ 是(II)的通解，两方程组有公共解 $\Leftrightarrow$ $\xi_2+c_3\eta_3-\xi_1$ 可由 η_1,η_2 线性表示.　　即：$r(\eta_1,\eta_2)=r(\eta_1,\eta_2\vdots\xi_2+c_3\eta_3-\xi_1)$

③ 设(I)的通解已知，把该通解代入(II)中，找出(I)的通解中的任意常数所应满足(II)的关系式而求出公共解。

$\boxed{\text{标准正交基}}$ n 个 n 维线性无关的向量, 两两正交, 每个向量长度为 1.

$\boxed{\text{向量}\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T\text{与}\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T\text{的内积}}$ $(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=\sqrt{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}$

$\boxed{\alpha\text{与}\beta\text{正交}}$ $(\alpha,\beta)=0$.　记为：$\alpha\perp\beta$

$\boxed{\text{向量}\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T\text{的长度}}$ $\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$

$\boxed{\alpha\text{是单位向量}}$ $\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=1$.　即长度为1的向量.

√ 内积的性质： ① 正定性：$(\alpha,\alpha)\ge 0,$ 且 $(\alpha,\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=o$

② 对称性：$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$

③ 双线性：$(\alpha,\beta_1+\beta_2)=(\alpha,\beta_1)+(\alpha,\beta_2)$

$(\alpha_1+\alpha_2,\beta)=(\alpha_1,\beta)+(\alpha_2,\beta)$

$(c\alpha,\beta)=c(\alpha,\beta)=(\alpha,c\beta)$

$\boxed{A\text{的特征矩阵}}$ $\lambda E-A$.

$\boxed{A\text{的特征多项式}}$ $|\lambda E-A|=\varphi(\lambda)$.

√ $\varphi(\lambda)$ 是矩阵 A 的特征多项式 $\Rightarrow \varphi(A)=O$

$\boxed{A\text{的特征方程}}$ $|\lambda E-A|=0$. $Ax=\lambda x$（x为非零列向量） $\rightarrow$ Ax与x线性相关

√ $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ $\sum_1^n \lambda_i=\mathrm{tr}A$，$\mathrm{tr}A$ 称为矩阵 A 的$\boxed{\text{迹}}$.

√ 上三角阵、下三角阵、对角阵的特征值就是主对角线上的 n 各元素.

√ 若 $|A|=0$, 则 $\lambda=0$ 为 A 的特征值, 且 $Ax=o$ 的基础解系即为属于 $\lambda=0$ 的线性无关的特征向量.

√ $r(A)=1\Leftrightarrow A$ 一定可分解为 $A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)$、$A^2=(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)A$, 从而 A 的特征值为：

$\lambda_1=\mathrm{tr}A=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$, $\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$ $p_{\text{指南}358}$.

㊟ $(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$ 为 A 各行的公比，$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 为 A 各列的公比.

√ 若 A 的全部特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，$f(A)$ 是多项式, 则:

① 若 A 满足 $f(A)=O\Rightarrow A$ 的任何一个特征值必满足 $f(\lambda_i)=0$

② $f(A)$ 的全部特征值为 $f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n)$；$|f(A)|=f(\lambda_1)f(\lambda_2)\cdots f(\lambda_n)$.

√ 初等矩阵的性质：

$\lvert E(i,j)\rvert=-1$	$\lvert E[i(k)]\rvert=k$	$\lvert E[i,j(k)]\rvert=1$
$E(i,j)^T=E(i,j)$	$E[i(k)]^T=E[i(k)]$	$E[i,j(k)]^T=E[j,i(k)]$
$E(i,j)^{-1}=E(i,j)$	$E[i(k)]^{-1}=E[i(\frac{1}{k})]$	$E[i,j(k)]^{-1}=E[i,j(-k)]$
$E(i,j)^*=-E(i,j)$	$E[i(k)]^*=kE[i(\frac{1}{k})]$	$E[i,j(k)]^*=E[i,j(-k)]$

√ 设 $f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$，对 n 阶矩阵 A 规定：$f(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0E$ 为 A 的

一个多项式.

√ λ是A的特征值,则:$\left\{\begin{array}{l} kA \\ aA+bE \\ A^T \\ A^{-1} \\ A^* \\ A^2 \\ A^m \end{array}\right.$ 分别有特征值 $\begin{array}{l} k\lambda \\ a\lambda+b \\ \lambda \\ \frac{1}{\lambda} \\ \frac{|A|}{\lambda}=\frac{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_3}{\lambda} \\ \lambda^2 \\ \lambda^m \end{array}$.

√ x是A关于λ的特征向量,则x也是$\left\{\begin{array}{l} kA \\ aA+bE \\ A^{-1} \\ A^* \\ A^2 \\ A^m \end{array}\right.$ 关于 $\begin{array}{l} k\lambda \\ a\lambda+b \\ \frac{1}{\lambda} \\ \frac{|A|}{\lambda}=\frac{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_3}{\lambda} \\ \lambda^2 \\ \lambda^m \end{array}$ 的特征向量.

√ A^2, A^m 的特征向量不一定是 A 的特征向量.

√ A 与 A^T 有相同的特征值，但特征向量不一定相同.

$\boxed{A\text{与}B\text{相似}}$ $P^{-1}AP=B$ （P 为可逆矩阵） 记为：$A \sim B$

$\boxed{A\text{与}B\text{正交相似}}$ $P^{-1}AP=B$ （P 为正交矩阵）

$\boxed{A\text{可以相似对角化}}$ A 与对角阵 Λ 相似. 记为：$A \sim \Lambda$ （称 Λ 是 A 的$\boxed{\text{相似标准形}}$）

√ A 可相似对角化 $\Leftrightarrow n-r(\lambda_i E-A)=k_i$ k_i 为 λ_i 的重数 $\Leftrightarrow$ A 恰有 n 个线性无关的特征向量. 这时, P 为 A 的特征向量拼成的矩阵, $P^{-1}AP$ 为对角阵, 主对角线上的元素为 A 的特征值. 设 α_i 为对应于 λ_i 的线性无关的特征向量, 则有：

$$A\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)}_{P}=(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n)=(\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\cdots,\lambda_n\alpha_n)=\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}}_{\Lambda}.$$

㊟：当 $\lambda_i=0$ 为 A 的重的特征值时，A 可相似对角化 $\Leftrightarrow$ λ_i 的重数 $=n-r(A)=$ $Ax=o$ 基础解系的个数.

√ 若 n 阶矩阵 A 有 n 个互异的特征值 $\Rightarrow$ A 可相似对角化.

√ 若 A 可相似对角化, 则其非零特征值的个数（重根重复计算）$=r(A)$.

√ 若 $A \sim \Lambda \Rightarrow A^k=P\Lambda^kP^{-1}$，$g(A)=Pg(\Lambda)P^{-1}=P\begin{pmatrix} g(\lambda_1) & & & \\ & g(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & g(\lambda_n) \end{pmatrix}P^{-1}$

√ 相似矩阵的性质：

① $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$, 从而 A,B 有相同的特征值, 但特征向量不一定相同.

㊟ x 是 A 关于 λ_0 的特征向量, $P^{-1}x$ 是 B 关于 λ_0 的特征向量.

② $\mathrm{tr}A=\mathrm{tr}B$

③ $|A|=|B|$　　从而 A,B 同时可逆或不可逆

④ $r(A)=r(B)$

⑤ $A^T \sim B^T$；$A^{-1} \sim B^{-1}$　（若 A,B 均可逆）；$A^* \sim B^*$

⑥ $A^k \sim B^k$　（k 为整数）；$f(A) \sim f(B)$，$|f(A)|=|f(B)|$

⑦ $A \sim B, C \sim D \Rightarrow \begin{pmatrix} A & \\ & C \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B & \\ & D \end{pmatrix}$

㊟前四个都是必要条件.

√ 数量矩阵只与自己相似.

√ 实对称矩阵的性质：

① 特征值全是实数, 特征向量是实向量；

② 不同特征值对应的特征向量必定正交；

㊟：对于普通方阵，不同特征值对应的特征向量线性无关；

③一定有 n 个线性无关的特征向量.

若 A 有重的特征值, 该特征值 λ_i 的重数=$n-r(\lambda_i E-A)$；

④必可用正交矩阵相似对角化，即：任一实二次型可经正交变换化为标准形；

⑤与对角矩阵合同，即：任一实二次型可经可逆线性变换化为标准形；

⑥两个实对称矩阵相似$\Leftrightarrow$有相同的特征值.

$\boxed{\text{正交矩阵}}$ $AA^T = E$

√ A为正交矩阵$\Leftrightarrow$ A的n个行（列）向量构成□^{n}的一组标准正交基.

√ 正交矩阵的性质：① $A^T = A^{-1}$；

② $AA^T = A^T A = E$；

③ 正交阵的行列式等于 1 或−1；

④ A是正交阵, 则A^T，A^{-1}也是正交阵；

⑤ 两个正交阵之积仍是正交阵；

⑥ A的行（列）向量都是单位正交向量组.

$\boxed{\text{二次型}}$ $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^T A x = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ $\quad a_{ij} = a_{ji}$，即A为对称矩阵，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$

$\boxed{A\text{与}B\text{合同}}$ $C^T AC = B$. 记作：A□B （A,B为实对称矩阵,C为可逆矩阵）

$\boxed{\text{正惯性指数}}$ 二次型的规范形中正项项数p $\boxed{\text{负惯性指数}}$二次型的规范形中负项项数$r-p$

$\boxed{\text{符号差}}$ $2p-r$ （r为二次型的秩）

√ 两个矩阵合同$\Leftrightarrow$它们有相同的正负惯性指数$\Leftrightarrow$他们的秩与正惯性指数分别相等.

√ 两个矩阵合同的充分条件是：A□B

√ 两个矩阵合同的必要条件是：$r(A) = r(B)$

√ $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^T A x$经过$\begin{cases}\text{正交变换}\\ \text{合同变换}\\ \text{可逆线性变换}\end{cases}$ $x = Cy$化为$f = \sum\limits_{1}^{n} d_i y_i^{\,2}$ $\boxed{\text{标准形}}$.

√ 二次型的标准形不是唯一的, 与所作的正交变换有关, 但非零系数的个数是由 $r(A)$ 唯一确定的.

正惯性指数+负惯性指数

√ 当标准形中的系数d_i为−1 或 0 或 1 时, 称为二次型的$\boxed{\text{规范形}}$.

√ 实对称矩阵的正（负）惯性指数等于它的正（负）特征值的个数.

√ 惯性定理：任一实对称矩阵 A 与唯一对角阵 $\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$ 合同.

√ 用正交变换化二次型为标准形：

① 求出 A 的特征值、特征向量；

② 对 n 个特征向量正交规范化；

③ 构造 C（正交矩阵），作变换 $x=$ ，则 $(Cy)^T A(Cy) = y^T C^T ACY = y^{-1}C^T ACY = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ 新的二次型为 $f = \sum_1^n d_i y_i^2$，Λ 的主对角上的元素 d_i 即为 A 的特征值.

$\boxed{\text{施密特正交规范化}}$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,

$$\text{正交化}\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 \\ \beta_2 = \alpha_2 - \dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 \\ \beta_3 = \alpha_3 - \dfrac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 - \dfrac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2 \end{cases}$$

$$\text{单位化：}\eta_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} \qquad \eta_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} \qquad \eta_3 = \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}$$

技巧：取正交的基础解系，跳过施密特正交化。让第二个解向量先与第一个解向量正交，再把第二个解向量代入方程，确定其自由变量.　　例如：$x_1 + x_2 - x_3 = 0$ 取 $\beta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{正定二次型}}$ $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全为零，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) > 0$.

$\boxed{\text{正定矩阵}}$ 正定二次型对应的矩阵.

√ $f(x)=x^TAx$ 为正定二次型 $\Leftrightarrow$（之一成立）：

① $\forall x\neq o$ ，$x^TAx>0$；

② A 的特征值全大于 0；

③ f 的正惯性指数为 n；

④ A 的所有顺序主子式全大于 0；

⑤ A 与 E 合同，即存在可逆矩阵 C 使得 $C^TAC=E$；

⑥ 存在可逆矩阵 P，使得 $A=P^TP$；

⑦ 存在正交矩阵 C，使得 $C^TAC=C^{-1}AC=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ （λ_i 大于 0）.

√ 合同变换不改变二次型的正定性.

√ A 为正定矩阵 $\Rightarrow a_{ii}>0$ ；$|A|>0$.

√ A 为正定矩阵 $\Rightarrow A^T,A^{-1},A^*$ 也是正定矩阵.

√ A 与 B 合同，若 A 为正定矩阵 $\Rightarrow B$ 为正定矩阵

√ A,B 为正定矩阵 $\Rightarrow A+B$ 为正定矩阵，但 AB,BA 不一定为正定矩阵.