

# 第一章 随机事件及其概率

## 第一节 随机事件及其运算

### 习题 1-1

1. 写出下列随机试验的样本空间  $S$  :

(1) 袋中有 3 个红球和 2 个白球, 现在从袋中任取三个球, 观察其颜色;

解:  $S = \{RRR, RRW, RWW\}$ , 其中  $R$  表示红球,  $W$  表示白球,  $RRW$  表示取出的三球为 2 个红球和 1 个白球.

(2) 同时掷二枚骰子, 观察正面向上点数之和;

解:  $S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ .

(3) 对某一目标进行射击, 直到击中目标为止, 观察其射击次数;

解:  $S = \{1, 2, 3, \dots\}$ .

(4) 生产某产品直到 5 件正品为止, 观察记录生产该产品的总件数;

解:  $S = \{5, 6, 7, \dots\}$ .

(5) 把颜色为红、黄、蓝的三个球放入编号为 1, 2, 3 的三个盒子中, 观察放球结果.

解:

$S = \{(R1, Y2, B3), (R1, Y3, B2), (R2, Y1, B3), (R2, Y3, B1), (R3, Y1, B2), (R3, Y2, B1)\}$ ,

其中  $R$  表示红球,  $Y$  表示黄球,  $B$  表示蓝球,  $(R1, Y3, B2)$  表示红球、黄球、蓝球分别放在编号为 1、3、2 的盒子中.

2. 举例说明两事件  $A, B$  “都不发生”与“不都发生”的区别.

解: 甲乙 2 人同时向目标射击 1 次, 事件  $A = \{\text{甲命中目标}\}$ , 事件  $B = \{\text{乙命中目标}\}$ , 事件  $A, B$  都不发生表示甲乙都没有命中目标,  $A, B$  不都发生包含甲乙都没有命中目标、甲没有命中目标但乙命中目标、甲命中目标但乙没有命中目标 3 中情况.

3. 设某试验的样本空间  $S = \{1, 2, \dots, 10\}$ , 事件  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{3, 4, \dots, 6\}$ ,  $C = \{6, 7, 8\}$ , 试用相应的样本点表示下列事件:

(1)  $A - B$ ; (2)  $\overline{A \cup B}$ ; (3)  $\overline{ABC}$ ; (4)  $\overline{A(B \cup C)}$ .

解: (1)  $A - B = \{1, 2\}$ ; (2)  $\overline{A \cup B} = \{4, 5, \dots, 10\}$ ;

(3)  $BC = \emptyset$ , 故  $\overline{ABC} = AS = A$ ,  $\overline{\overline{ABC}} = \{4, 5, \dots, 10\}$ ;

(4)  $A(B \cup C) = \{3\}$ , 故  $\overline{A(B \cup C)} = \{1, 2, 4, 5, \dots, 10\}$ .

4. 某人向一目标连续射击 3 枪, 设  $A_i = \{\text{第 } i \text{ 枪击中目标}\}, i = 1, 2, 3$  试用事件  $A_1, A_2, A_3$  及事件的运算表示下列各事件:

(1)  $A = \{\text{只有第一枪击中目标}\}$ ; (2)  $B = \{\text{只有一枪击中目标}\}$ ;

(3)  $C = \{\text{至少有一枪击中目标}\}$ ; (4)  $D = \{\text{最多有一枪击中目标}\}$ ;

(5)  $E = \{\text{第一枪、第三枪中至少有一枪击中目标}\}$ .

解: (1)  $A = A_1 \overline{A_2} \overline{A_3}$ ; (2)  $B = A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} \cup \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} \cup \overline{A_1} \overline{A_2} A_3$ ;

(3)

$C = (A_1 \overline{A_2} \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} A_2 \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \overline{A_2} A_3) \cup (A_1 A_2 \overline{A_3}) \cup (A_1 \overline{A_2} A_3) \cup (\overline{A_1} A_2 A_3) \cup (A_1 A_2 A_3)$

或  $C = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ ;

(4)  $D = (A_1 \overline{A_2} \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} A_2 \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \overline{A_2} A_3) \cup (\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3})$ ;

(5)  $E = A_1 \cup A_3$ .

5. 设  $S = \{x | 0 \leq x < 2\}$ ,  $A = \{x | \frac{1}{2} < x < 1\}$ ,  $B = \{x | \frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{2}\}$ , 求  $\overline{A \cup B}$ ,  $AB$ ,

$\overline{A \cup B}$ .

解:  $A \cup B = B = \{x | \frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{2}\}$ , 故  $\overline{A \cup B} = \{x | 0 \leq x < \frac{1}{4} \text{ 或 } \frac{3}{2} \leq x < 2\}$ ;

$AB = A = \{x | \frac{1}{2} < x < 1\}$ ;  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} = S$

6. 用排列或组合方法, 计算下列随机试验的样本空间的样本点的总数:

(1) 观察三粒种子发芽情况;

(2) 从 30 名学生中任选 2 人参加某项活动, 观察选举情况;

(3) 将 4 个 QQ 漂流瓶随机发给 3 个不同的 QQ 用户, 观察发送情况.

解: (1)  $2^3 = 8$ ; (2)  $C_{30}^2 = 435$ ; (3)  $3^4 = 81$ .

## 第二节 随机事件的概率

### 习题 1-2

1. 三个学生证混放在一起, 现将其随意发给这三名学生, 求事件  $A = \{\text{没有一名学生拿到自己的学生证}\}$  的概率.

解：用  $a, b, c$  分别表示这三名学生拿到自己的学生证。由于每个学生拿到学生证是随机的，这是一个古典概型，样本空间  $S = \{abc, acb, bac, bca, cab, cba\}$  中共含有 6 个样本点，其中事件  $A = \{bca, cab\}$  中共含有 2 个样本点，故  $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 。

2. 在分别写有 2,4,6,7,8,11,12,13 的 8 张卡片中任取两张,将卡片上的两个数组成一个分数,求所得分数为既约分数(分子和分母没有大于 1 的公因数)的概率。

解：由于卡片任意选取，故这是一个古典概型，样本空间  $S$  中共含有  $C_8^2 = 28$  个样本点。将这 8 个数分成奇数部分 7,11,13 和偶数部分 2,4,6,8,12，则从奇数部分任取两个数可以组成一个既约分数，从偶数部分任取两个数不可以组成一个既约分数，从奇数部分和偶数部分各任取一个数可以组成一个既约分数，故事件  $A = \{\text{所得分数为既约分数}\}$  中所含样本点个数为  $C_3^2 + C_3^1 C_5^1 = 18$ ，所以

$$P(A) = \frac{18}{28} = \frac{9}{14}.$$

3. 一批零件有 40 只,其中 3 只是坏的,从中任取 5 只进行检查,问:

(1)5 只全是好的概率为多少? (2)5 只中有 2 只坏的概率为多少? (3)恰有一件坏的概率; (4)至少有一件坏的概率; (5)至多有一件坏的概率。

解：零件的抽取是随机的，故此试验是古典概型，样本空间中含有样本点数为  $C_{40}^5$ ：

$$(1) \text{ 设事件 } A = \{5 \text{ 只零件全是好}\}, \text{ 则 } P(A) = \frac{C_{37}^5}{C_{40}^5} = \frac{35 \times 34 \times 33}{40 \times 39 \times 38} = 0.6624;$$

$$(2) \text{ 设事件 } B = \{5 \text{ 只零件中有 2 只坏的}\}, \text{ 则 } P(B) = \frac{C_{37}^3 C_3^2}{C_{40}^5} = 0.0354;$$

$$(3) \text{ 设事件 } C = \{5 \text{ 只零件中恰有 1 件坏的}\}, \text{ 则 } P(C) = \frac{C_{37}^4 C_3^1}{C_{40}^5} = 0.3011;$$

(4) 设事件  $D = \{5 \text{ 只零件至少有 1 件坏的}\}$ ，显然事件  $A$  与  $D$  互为逆事件，则

$$P(D) = 1 - P(A) = 1 - 0.6624 = 0.3376;$$

$$(5) \text{ 设事件 } E = \{5 \text{ 只零件至多有 1 件坏的}\}, \text{ 则 } P(E) = \frac{C_{37}^4 C_3^1 + C_{37}^5}{C_{40}^5} = 0.9635.$$

4. 在 QQ 号码表中任取一个 QQ 号码,求此号码后面 4 个数字全不相同的概率。

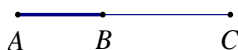
解：QQ 号码的任何一位数字可以为 0-9 中的任意数字，故在只考察 QQ 号码后 4 个数字时共有  $10^4$  个 QQ 号码，每个号码的出现都是等可能的，其中后 4 个数字全不相同的 QQ 号码共有  $10 \times 9 \times 8 \times 7$  个，故该号码后面 4 个数字全不相同

的概率为

$$\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{10^4} = 0.504.$$

5. 某公共汽车站的每隔 5 分钟有一辆汽车进站, 乘客到达车站的时间是任意的, 求一个乘客的候车时间不超过 3 分钟的概率.

解: 乘客到站是随机的, 故这是一个几何概型. 如图所示,



$A, C$  表示汽车进站的时刻,  $AB$  之间的时间长度为 2 分钟. 若乘客在  $AB$  这段时间内到站 (不考虑  $A$  时刻点), 则需要候车 3 分钟以上, 而在  $BC$  这段时间内到站不需要候车 3 分钟以上, 故一个乘客的候车时间不超过 3 分钟的概率为  $\frac{3}{5} = 0.6$ .

6. 从  $(0,1)$  内取两个数, 求下列事件的概率: (1) 两数之和小于 1.5; (2) 两数之积小于 0.25; (3) 两数中最大者大于 0.5.

解: 这是一个几何概型, 样本空间  $S$  如图所示:

设事件  $A = \{\text{两数之和小于 } 1.5\} = \{(x, y) \mid x + y < 1.5, x > 0, y > 0\}$ , 如阴影部分所示, 故

$$P(A) = \frac{1 - \frac{1}{2} \times 0.5 \times 0.5}{1} = 0.875$$

(1) 设事件  $B = \{\text{两数之积小于 } 0.25\} = \{(x, y) \mid xy < 0.25, x > 0, y > 0\}$ , 如阴影部分所示,

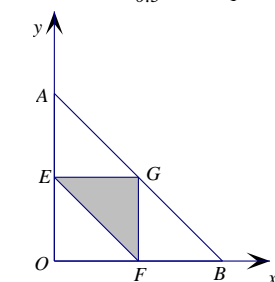
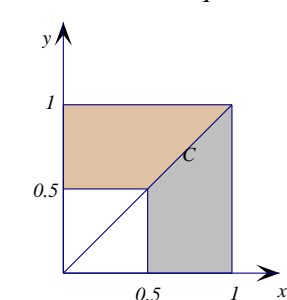
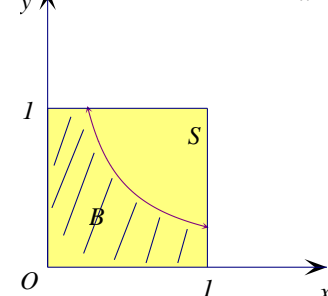
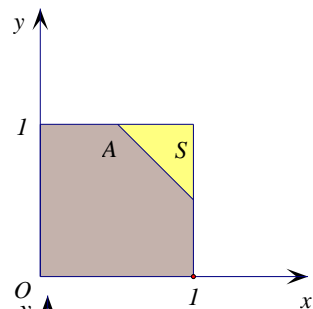
$$\text{故 } P(B) = 0.25 \times 1 + \int_{0.25}^1 \frac{0.25}{x} dx = \frac{1 + \ln 4}{4}.$$

(3) 设事件  $C = \{\text{两数中最大者大于 } 0.5\} = \{(x, y) \mid \max(x, y) > 0.5, x > 0, y > 0\}$ , 如阴影部分所示,

$$\text{故 } P(C) = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

7. 在长度为  $a$  的线段内任取两点将其分为三段, 求它们可以构成一个三角形的概率.

解: 设三条线段长度分别为  $x, y, a - x - y$ , 其中  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a - x, 0 \leq x + y \leq a$ . 故在长度为  $a$  的线段内任取两点将其分为三段的试验可以与如图所示的三角形区域  $OAB$  内每个点一一对应, 该试验可看做一个几何概型. 事件  $C = \{\text{三条线段可以构成一个三角形}\}$  当且仅当



$$\begin{cases} x+y > a-x-y \\ x+a-x-y > y \\ y+a-x-y > x \end{cases},$$

即  $x, y$  满足  $0 \leq x \leq \frac{a}{2}, 0 \leq y \leq \frac{a}{2}, \frac{a}{2} \leq x+y \leq a$ , 如图中阴影部分所示. 故

$$P(C) = \frac{S_{\triangle EFG}}{S_{\triangle OAB}} = \frac{1}{4}.$$

8. 设每个人在一年的 12 个月中出生是等可能的. 试求 4 个人中至少有 2 个人是同月出生的概率.

解: 显然事件  $A = \{4 \text{ 个人中至少有 2 个人是同月出生}\}$  与事件  $B = \{4 \text{ 个人中没有 2 个人是同月出生}\}$  互为逆事件. 由题意知每个人在一年的 12 个月中出生是等可能的, 故试验可以看做一个古典概型, 其中样本空间  $S$  中含有样本点数为  $12^4$ , 故

$$P(A) = 1 - P(B) = 1 - \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{12^4} = 0.4271.$$

9. 从一副扑克牌的 13 张梅花中, 一张接一张有放回地抽取 3 张, 求:

(1) 没有同号的概率; (2) 有同号的概率; (3) 3 张中至多有 2 张同号的概率.

解: 试验是从一副扑克牌的 13 张梅花中, 一张接一张有放回地抽取 3 张, 是一个古典概型, 其中样本空间  $S$  中含有样本点数为  $13^3$ , 故

$$(1) \text{ 设事件 } A = \{\text{没有同号}\}, \text{ 则 } P(A) = \frac{13 \times 12 \times 11}{13^3} = 0.7811;$$

$$(2) \text{ 设事件 } B = \{\text{有同号}\}, \text{ 显然 } P(B) = 1 - P(A) = 0.2189;$$

(3) 设事件  $C = \{3 \text{ 张中至多有 2 张同号}\}$ , 显然事件  $C$  与事件  $D = \{3 \text{ 张都同号}\}$  互为逆事件, 则  $P(C) = 1 - P(D) = 1 - \frac{13 \times 1 \times 1}{13^3} = \frac{168}{169} = 0.9941$ .

10. 把 10 本书随意地放在书架上, 求其中指定的 4 本书放在一起的概率.

解: 由于书的摆放是随机的, 且摆法有限, 故该试验是古典概型, 其中样本空间  $S$  中含有样本点数为  $10!$ . 事件  $A = \{\text{指定的 4 本书放在一起}\}$  中含有的样本点数为  $4!7!$  (将指定的 4 本书放在一起看做一本大书, 再与其他 6 本书一起随机摆放, 注意这指定的 4 本书需要进行排列), 故  $P(A) = \frac{4!7!}{10!} = \frac{1}{30} = 0.0333$ .

11. 设  $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{2}$ , 试就下列三种情况分别求出  $P(\overline{AB})$  的值:

(1)  $A$  与  $B$  互不相容; (2)  $A \subset B$ ; (3)  $P(AB) = \frac{1}{8}$ .

解: 由  $P(\overline{AB}) = P(B) - P(AB)$ , 得

(1) 当  $A$  与  $B$  互不相容时,  $AB = \emptyset$ , 则  $P(AB) = 0$ , 故  $P(\overline{AB}) = P(B) = \frac{1}{2}$ ;

(2) 当  $A \subset B$  时,  $AB = A$ , 故  $P(\bar{A}B) = P(B) - P(A) = \frac{1}{6}$ ;

(3) 当  $P(AB) = \frac{1}{8}$  时,  $P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB) = \frac{3}{8}$ .

12. 将 3 个球随机的放入 4 个杯子中, 求杯子中球的最大个数为 1, 2, 3 的概率.

解: 球放入杯子中是随机的, 且放法有限, 故这是一个古典概型, 其中样本空间  $S$  中含有样本点数为  $4^3$ .

设事件  $A = \{\text{杯子中球的最大个数为 1}\}$ , 则其中含有样本点数为  $C_4^3 \times 3!$  (先从 4 个杯子中拿出三个杯子, 然后每个杯子中放一个球), 故  $P(A) = \frac{6C_4^1}{4^3} = \frac{3}{8}$ ;

设事件  $B = \{\text{杯子中球的最大个数为 2}\}$ , 则其中含有样本点数为  $C_4^1 \times C_3^2 \times C_3^1$  (先从 4 个杯子中拿出一个杯子, 然后在 3 个球中挑 2 个球放入, 其次在剩下的 3 个杯子中挑出一个杯子将剩下的 1 个球放入), 故  $P(B) = \frac{C_4^1 \times C_3^2 \times C_3^1}{4^3} = \frac{9}{16}$ ;

设事件  $C = \{\text{杯子中球的最大个数为 3}\}$ , 则其中含有样本点数为  $C_4^1 \times C_3^3$  (先从 4 个杯子中拿出一个杯子, 然后将 3 个球全部放入), 故  $P(C) = \frac{C_4^1 \times C_3^3}{4^3} = \frac{1}{16}$ ;

或  $P(C) = 1 - P(A) - P(B) = \frac{1}{16}$ .

### 第三节 条件概率和全概率公式

#### 习题 1-3

1. 盒中有 10 个球, 6 白 4 红, 无放回地每次取一球, 记  $A = \{\text{第一次取到白球}\}$ ,  $B = \{\text{第二次取到白球}\}$ , 求  $P(B|A)$ .

解: 由题意知  $P(A) = \frac{6}{10}$ ,  $P(AB) = \frac{6 \times 5}{10 \times 9} = \frac{1}{3}$ , 故

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{6}{10}} = \frac{5}{9}.$$

2. 10 个考签中有 4 个难签, 今有 3 人按甲先、乙次、丙最后的次序参加抽签 (不放回), 求:

(1) 甲没有抽到难签而乙抽到难签的概率. (2) 甲、乙、丙都抽到难签

的概率.

解: 设事件  $A = \{\text{甲抽到难签}\}$ , 事件  $B = \{\text{乙抽到难签}\}$ , 事件  $C = \{\text{丙抽到难签}\}$ , 则

(1) 事件  $D = \{\text{甲没有抽到难签而乙抽到难签}\}$  的概率

$$P(D) = P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{15};$$

(2) 事件  $E = \{\text{甲、乙、丙都抽到难签}\}$  的概率

$$P(E) = P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{30}.$$

注: 本题也可以按古典概型处理, 请读者自己完善.

3. 已知  $P(A) = \frac{1}{4}$ ,  $P(B|A) = \frac{1}{3}$ ,  $P(A|B) = \frac{1}{2}$ , 求  $P(A \cup B)$

解: 由于  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ , 故必须求出  $P(B)$ ,  $P(AB)$ . 由题意知

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{12}, \text{ 故 } P(B) = \frac{P(AB)}{P(A|B)} = \frac{1}{6}, \text{ 则}$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}.$$

4. 在空战中, 甲机先发现乙机并向其开火, 击落乙机的概率为 0.6. 若乙机未被击落则进行还击, 击落甲机的概率为 0.5. 若甲机未被击落则再次攻击乙机, 击落乙机的概率为 0.7. 在这几个回合中, 求: (1) 甲机被击落的概率; (2) 乙机被击落的概率.

解: 设事件  $A = \{\text{甲机被击落}\}$ , 事件  $B = \{\text{乙机被击落}\}$ ,  $B_1 = \{\text{甲机先发现乙机并向其开火, 击落乙机}\}$ , 则事件  $C = \{\text{乙机未被击落则进行还击, 击落甲机}\} = A|\bar{B}_1$ , 事件  $B_2 = \{\text{甲机未被击落则再次攻击乙机, 击落乙机}\} = B|\bar{C}\bar{B}_1$ , 由题意知  $P(B_1) = 0.6$ ,  $P(C) = 0.5$ ,  $P(B_2) = 0.6$ . 故

$$(1) P(A) = P(AB_1) + P(A\bar{B}_1) = P(\bar{B}_1)P(A|\bar{B}_1) = (1-0.6) \times 0.5 = 0.2;$$

$$(2) P(B) = P(B_1) + P(B\bar{C}\bar{B}_1) = P(B_1) + P(B|\bar{C}\bar{B}_1)P(\bar{C}|\bar{B}_1)P(\bar{B}_1) \\ = 0.6 + (1-0.6) \times (1-0.5) \times 0.7 = 0.74$$

5. 设男女两性的人口比例为 51:49, 男性色盲率为 2%, 女性色盲率为 0.25%. 现随机抽到一个人

(1) 求该人患色盲的概率; (2) 若已知抽到的人患色盲, 求该人为男性的概率.

解: 设事件  $A = \{\text{男性}\}$ , 事件  $B = \{\text{女性}\}$ , 事件  $C = \{\text{某人患色盲}\}$ , 则由题意知  $P(A) = 51\%$ ,  $P(B) = 49\%$ ,  $P(C|A) = 2\%$ ,  $P(C|B) = 0.25\%$ , 故

(1) 事件  $\{\text{随机抽到一人, 该人患色盲}\} = C$  的概率为

$$P(C) = P(AC) + P(BC) = P(A)P(C|A) + P(B)P(C|B) \\ = 51\% \times 2\% + 49\% \times 0.25\% = 0.011425.$$

(2) 事件  $E = \{\text{已知抽到的人患色盲, 该人为男性}\}$  的概率为

$$P(D) = P(A|C) = \frac{P(A)P(C|A)}{P(C)} = \frac{51\% \times 2\%}{0.011425} = 0.8928$$

6. 袋中有  $a$  个白球,  $b$  个黑球, 随机的取出一个, 然后放回, 并同时再放进与取出的球同色的球  $c$  个, 再取第二个, 如此反复取 3 次, 问取出的 3 个球中前两个球是黑球、第 3 个球为白球的概率.

解: 设事件  $A_i = \{\text{第 } i \text{ 次取出的球是黑球}\}$ ,  $i=1,2,3$ , 则事件  $B = \{\text{取出的 3 个球中前两个球是黑球、第 3 个球为白球}\}$  的概率为

$$P(B) = P(A_1 A_2 \bar{A}_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(\bar{A}_3|A_2 A_1) \\ = \frac{b}{a+b} \times \frac{b+c}{a+b+c} \times \frac{a}{a+b+2c}.$$

7. 将两信息分别编码为  $A$  和  $B$  传递出去, 接收站收到时,  $A$  被误收作  $B$  的概率为 0.02, 而  $B$  被误收作  $A$  的概率为 0.01, 信息  $A$  与信息  $B$  传递的频繁程度为 2: 1, 若接收站收到的信息是  $A$ , 问原发信息是  $A$  的概率是多少?

解: 设事件  $C = \{\text{发出信息 } A\}$ , 事件  $D = \{\text{收到信息 } A\}$ , 则由题意知  $P(C) = \frac{2}{3}$ ,  $P(\bar{D}|C) = 0.02$ ,  $P(D|\bar{C}) = 0.01$ , 则

$$P(C|D) = \frac{P(D|C)P(C)}{P(D|C)P(C) + P(D|\bar{C})P(\bar{C})} = \frac{\frac{2}{3} \times (1-0.02)}{\frac{2}{3} \times (1-0.02) + \frac{1}{3} \times 0.01} = \frac{196}{197}.$$

#### 第四节 随机事件的独立性

##### 习题 1-4

1. 电路由电池  $A$  和两个并联的电池  $B$  和  $C$  串联而成, 设电池  $A$ 、 $B$ 、 $C$  损坏的概率分别为 0.3、0.2、0.2, 求电路断电的概率.

解: 设事件  $A = \{\text{电池 } A \text{ 损坏}\}$ , 事件  $B = \{\text{电池 } B \text{ 损坏}\}$ , 事件  $C = \{\text{电池 } C \text{ 损坏}\}$ , 则由题意知  $P(A) = 0.3$ ,  $P(B) = 0.2$ ,  $P(C) = 0.2$  且三个电池是否损坏相互独立, 故事件  $D = \{\text{电路断电}\}$  的概率为

$$P(D) = P(A \cup (BC)) = P(A) + P(BC) - P(ABC) \\ = 0.3 + 0.2 \times 0.2 - 0.3 \times 0.2 \times 0.2 = 0.328$$

2. 三人独立的去破译一份密码, 已知各人能译出的概率分别是  $\frac{1}{5}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ , 问三人中至少有一人能将此密码译出的概率是多少?

解：设事件  $A_i = \{\text{第 } i \text{ 人破译了密码}\}$ ,  $i=1,2,3$ . 由题意不妨设  $P(A_1) = \frac{1}{5}$ ,  $P(A_2) = \frac{1}{3}$ ,  $P(A_3) = \frac{1}{4}$ , 且三人能否破译密码相互独立, 故事件  $D = \{\text{三人中至少有一个人能将此密码译出}\}$  的概率为

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) \\ &\quad - P(A_2A_3) - P(A_1A_3) + P(A_1A_2A_3) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

3. 投掷一个各面分别标有 1,2,3,4 的均质正四面体, 观察接触地面的点数. 设事件  $A = \{1,2\}$ ,  $B = \{1,3\}$ ,  $C = \{1,4\}$ , 证明: 事件  $A$ ,  $B$ ,  $C$  两两相互独立, 但事件  $A$ ,  $B$ ,  $C$  不相互独立.

证明: 由题意知  $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$ . 由于事件  $AB = \{1\}$ , 故  $P(AB) = \frac{1}{4}$ ,

显然有  $P(AB) = P(A)P(B)$ , 即事件  $A$ ,  $B$  相互独立. 同理可以证明事件  $A$ ,  $C$  相互独立, 事件  $B$ ,  $C$  两两相互独立, 所以事件  $A$ ,  $B$ ,  $C$  两两相互独立. 又事件  $ABC = \{1\}$ , 故  $P(ABC) = \frac{1}{4}$ , 显然  $P(ABC) = \frac{1}{4} < P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$ , 所以事件  $A$ ,  $B$ ,  $C$  不相互独立.

4. 考试时, 共有  $N$  张考签,  $n$  个学生参加考试 ( $n \geq N$ ), 设被抽过的考签立即放回, 求在考试结束时至少有一张考签没有被抽到的概率.

解: 设事件  $A = \{\text{在考试结束时至少有一张考签没有被抽到}\}$  ( $N > 1$ ), 其与事件  $B = \{\text{在考试结束时每一张考签都被抽到}\}$  互为逆事件.

一次抽取中每张考签被抽到的概率是  $\frac{1}{N}$ , 相应地一次抽取中每张考签没有被抽到的概率是  $1 - \frac{1}{N}$ . 由学生抽取考签的独立性知  $n$  次抽取中某张考签都没被抽到的概率是  $(1 - \frac{1}{N})^n$ , 故  $n$  次抽取, 某张考签被抽到的概率是  $1 - (1 - \frac{1}{N})^n$ . 由于考签是否被抽到相互独立, 故  $n$  次抽取,  $N$  张考签都被抽到的概率是  $\left[1 - (1 - \frac{1}{N})^n\right]^N$ , 即事件  $B$  的概率为  $[1 - (1 - \frac{1}{N})^n]^N$ , 故在考试结束时至少有一张考签没有被抽到的概率是  $1 - [1 - (1 - \frac{1}{N})^n]^N$ .

5. 设三台机器相互独立的运转着, 第一、二、三台机器发生的故障的概率依次为 0.9、0.8、0.3, 求这三台机器不发生故障及它们中至少有一台发生故障的概率.

解：设事件  $A_i = \{\text{第 } i \text{ 台机器发生故障}\}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . 由题意知  $P(A_1) = 0.9$ ,  $P(A_2) = 0.8$ ,  $P(A_3) = 0.3$ , 则事件  $B = \{\text{三台机器不发生故障}\}$  的概率为

$$P(B) = P(\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = (1-0.9)(1-0.8)(1-0.3) = 0.014;$$

事件  $C = \{\text{三台机器中至少有一台发生故障}\}$  的概率为

$$P(C) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3) \\ = 0.9 + 0.8 + 0.3 - 0.9 \times 0.8 - 0.9 \times 0.3 - 0.8 \times 0.3 + 0.9 \times 0.8 \times 0.3 = 0.986.$$

6. 证明：若三个事件  $A, B, C$  相互独立，则  $A \cup B, AB$  及  $A - B$  都与  $C$  相互独立.

证明：若三个事件  $A, B, C$  相互独立，则有  $P(BC) = P(B)P(C)$ ,  $P(AB) = P(A)P(B)$ ,  $P(AC) = P(A)P(C)$ ,  $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ . 显然有  $P(AB \cap C) = P(AB)P(C)$ . 此外

$$P((A \cup B)C) = P[(AC) \cup (BC)] = P(AC) + P(BC) - P(ABC) \\ = [P(A) + P(B) - P(AB)]P(C) = P(A \cup B)P(C),$$

$$P((A - B)C) = P[AC - BC] = P(AC) - P(ABC) = P(A)P(C)[1 - P(B)] \\ = [P(A) - P(AB)]P(C) = P(A - B)P(C)$$

故  $A \cup B, AB$  及  $A - B$  都与  $C$  相互独立.

7. 设三次试验是相互独立的，事件  $A$  在每次试验中出现的概率相等，若已知  $A$  至少出现一次的概率为  $\frac{19}{27}$ ，求事件  $A$  在一次试验中出现的概率.

解：设事件  $A$  在一次试验中出现的概率为  $p$ ，由题意知

$$1 - C_3^0 p^0 (1-p)^3 = \frac{19}{27},$$

解得  $p = \frac{1}{3}$ .

8. 一个学生想借本书，决定到三个图书馆去借，每个图书馆都有无此书是等可能的，如有，是否借出也是等可能的，设三个图书馆都有无此书，是否借出是互相独立的，求此学生借到此书的概率.

解：设事件  $A_i = \{\text{第 } i \text{ 个图书馆有此书}\}$ ，事件  $B = \{\text{此书未借出}\}$ ，则由题意知

$P(A_i) = \frac{1}{2}$ ,  $P(B|A_i) = \frac{1}{2}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ，由独立性知事件  $C = \{\text{此学生借到此书}\}$  的概率为

$$\begin{aligned}
 P(C) &= P((A_1 \cup A_2 \cup A_3)B) = \sum_{i=1}^3 P(A_i B) - \sum_{3 \geq j > i=1}^3 P(A_i A_j B) + P(A_1 A_2 A_3 B) \\
 &= 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{37}{64}
 \end{aligned}$$

或每个图书馆借不到该书的概率为  $1 - P(A_i B) = \frac{3}{4}$ . 该生借不到该书必须在每个图书馆都借不到该书, 故该生可以借到该书的概率为  $1 - (\frac{3}{4})^3 = \frac{37}{64}$ .

9. 有甲乙两批种子, 发芽率分别为 0.8 和 0.7, 在两批种子中各随机的抽取一粒, 求下列事件的概率:

- (1) 两粒种子都能发芽;
- (2) 至少有一粒种子能发芽;
- (3) 恰有一粒种子能发芽.

解: 设事件  $A = \{\text{甲种子发芽}\}$ , 事件  $B = \{\text{乙种子发芽}\}$ , 由题意知  $P(A) = 0.8$ ,

$P(B) = 0.7$ , 故有独立性知

- (1) 事件  $C = \{\text{两粒种子都能发芽}\}$  的概率为

$$P(C) = P(AB) = P(A)P(B) = 0.56;$$

- (2) 事件  $D = \{\text{至少有一粒种子能发芽}\}$  的概率为

$$P(D) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0.94;$$

- (3) 事件  $E = \{\text{恰有一粒种子能发芽}\}$  的概率为

$$P(E) = P(A\bar{B} \cup \bar{A}B) = P(A)P(\bar{B}) + P(\bar{A})P(B) = 0.35.$$

10. 甲乙两人投篮的命中率分别为 0.7 与 0.8, 每人投篮 3 次. 求: (1) 甲乙进球数相等的概率; (2) 甲比乙进球多的概率.

解: 设事件  $A = \{\text{甲投篮命中}\}$ , 事件  $B = \{\text{乙投篮命中}\}$ , 由题意知  $P(A) = 0.7$ ,

$P(B) = 0.8$ , 故有独立性知在 3 次投篮中, 事件  $A_i = \{\text{甲命中 } i \text{ 个球}\}$  的概率为

$C_3^i \times 0.7^i \times 0.3^{3-i}$ , 事件  $B_i = \{\text{乙命中 } i \text{ 个球}\}$  的概率为  $C_3^i \times 0.8^i \times 0.2^{3-i}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ .

- (1) 事件  $C = \{\text{甲乙进球数相等}\}$  的概率为

$$\begin{aligned}
 P(C) &= P(A_0 B_0 \cup A_1 B_1 \cup A_2 B_2 \cup A_3 B_3) = P(A_0 B_0) + P(A_1 B_1) + P(A_2 B_2) + P(A_3 B_3) \\
 &= \sum_{i=0}^3 (C_3^i)^2 \times 0.56^i \times 0.06^{3-i} = 0.36332;
 \end{aligned}$$

- (1) 事件  $D = \{\text{甲比乙进球多}\}$  的概率为

$$\begin{aligned}
 P(D) &= P(A_1 B_0 \cup A_2 B_0 \cup A_2 B_1 \cup A_3 B_0 \cup A_3 B_1 \cup A_3 B_2) \\
 &= C_3^1 \times 0.7^1 \times 0.3^2 \times 0.2^3 + C_3^2 \times 0.7^2 \times 0.3^1 (0.2^3 + C_3^1 \times 0.8^1 \times 0.2^2) + C_3^3 \times 0.7^3 (1 - 0.8^3) \\
 &= 0.21476.
 \end{aligned}$$

## 第五节 伯努利概型

### 习题 1-5

1. 某型号高炮, 每门炮发射炮弹击中飞机的概率为 0.6, 如果有若干门炮同时发射一发炮弹, 问欲以 99% 的把握击中来犯的一架敌机, 至少需要配置多少门炮?

解: 易知每发炮弹未能击中飞机的概率为  $1-0.6$ , 则配置的  $n$  门某型号高炮同时未能击中敌机的概率为  $(1-0.6)^n$ , 故由题意知, 需使  $1-(1-0.6)^n \geq 0.99$ , 解得  $n \geq \log_{0.4}^{0.01} = 5.026$ , 故至少需要 6 门该型号高炮才能保证以 99% 的把握击中来犯的一架敌机.

2. 设在一次试验中, 事件  $A$  发生的概率为  $p$ , 现在进行  $n$  次独立试验, 试求  $A$  至多发生 1 次的概率.

解: 事件  $B = \{\text{在进行的 } n \text{ 次独立试验中, 事件 } A \text{ 至多发生 1 次}\}$  的概率为

$$P(B) = C_n^0 p^0 (1-p)^n + C_n^1 p^1 (1-p)^{n-1}.$$

3. 对一工厂的产品进行重复抽样检查, 共取 200 件样品, 检查结果发现其中有 4 件废品, 问我们能否相信此工厂出废品的概率不超过 0.005?

解: 假设此工厂出废品的概率不超过 0.005, 则在抽查的 200 件产品中, 出现 4 件次品的概率为

$$P_{200}(4) = C_{200}^4 (0.005)^4 (1-0.005)^{196} \approx 0.015.$$

如果次品率比 0.005 更小, 上述概率值会更小, 故这是一个小概率事件. 一般来说, 在一次试验中, 小概率事件是不会发生的. 现在既然发生了, 那么我们就没有理由坚持原假设, 故而不能相信此工厂出废品的概率不超过 0.005.

4. 做一系列独立试验, 每次试验成功的概率为  $p$ , 求在  $n$  次成功之前恰失败  $m$  次的概率.

解: 设事件  $A = \{\text{在 } n \text{ 次成功之前恰失败 } m \text{ 次}\}$ , 则共进行了  $n+m$  次试验, 且第  $n+m$  次试验成功, 前  $n+m-1$  次试验恰好有  $m$  次失败, 故由独立性知

$$P(A) = p \times C_{n+m-1}^{n-1} p^{n-1} (1-p)^m.$$

5. 一个平面上的质点从原点出发作随机游动, 若每秒走一步 (步长为一), 向右走的概率为  $p$ , 向上走的概率为  $q = 1-p$  ( $0 < p < 1$ ), 则

(1) 8 秒钟走到点  $A(5,3)$  的概率为多少?

(2) 已知它 8 秒走到了  $A(5,3)$ , 求它前 5 步均向右走, 后 3 步均向上走到  $A(5,3)$  的概率.

解: (1) 质点 8 秒钟走到点  $A(5,3)$ , 则质点一定是在 8 秒内向右走了 5 步, 向

上走了 3 步, 故事件  $B = \{\text{质点 8 秒钟走到点 } A(5,3)\}$  的概率为  $P(B) = C_8^5 p^5 (1-p)^3$ .

(2) 设事件  $C = \{\text{质点前 5 步均向右走, 后 3 步均向上走到 } A(5,3)\}$ , 则

$$P(C|B) = \frac{P(C)}{P(B)} = \frac{p^5 (1-p)^3}{C_8^5 p^5 (1-p)^3} = \frac{1}{56}.$$

6. 某类电灯泡使用时数在 1000 小时以上的概率为 0.2, 求三只灯泡在使用 1000 小时后最多只有一只坏的概率.

解: 设事件  $B = \{\text{三只灯泡在使用 1000 小时后最多只有一只损坏}\}$ , 则

$$P(B) = P_3(0) + P_3(1) = C_3^0 \times 0.2^0 \times 0.8^3 + C_3^1 \times 0.2^1 \times 0.8^2 = 0.896.$$

7. 设每次射击时命中概率为 0.2, 问至少必须进行多少次独立射击才能使至少击中 1 次的概率不小于 0.9?

解: 每次射击未能命中的概率为  $1-0.2$ , 则在  $n$  次独立的射击中, 一次未能命中的概率为  $(1-0.2)^n$ , 故由题意知  $1 - (1-0.2)^n \geq 0.9$ , 解得  $n \geq \log_{0.8}^{0.1} = 10.4231$ , 即至少必须进行 11 次独立射击才能使至少击中 1 次的概率不小于 0.9.

8. 有两盒火柴, 每盒都有  $n$  根火柴, 每次使用火柴时, 在两盒中任取一盒并从中抽取一根, 求用完一盒时另一盒中还有  $r$  ( $0 \leq r \leq 1$ ) 根火柴的概率.

解: 假设 A 盒用完, B 盒还有  $r$  根, 那么一共抽了  $2n-r$  根. 这么多次抽取动作中, 有  $n$  次都是操作在 A 盒上,  $n-r$  次操作在 B 盒上, 且最后一次一定操作在 A 盒. 于是就是从  $2n-r-1$  次抽取中, 选  $n-1$  次作用在 A 盒上, 所以概率就是  $C_{2n-r-1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r-1}$ .

注: 本题的理解方式不同会有不同的结果, 请读者尝试其他理解方法.

## 第二章 随机变量及其概率分布

### 一 典型例题

例 2.1 设随机变量  $X \sim N(2, p)$ , 且  $P\{X=0\} = P\{X=1\}$ , 试求参数  $p$  的值.

【分析与解答】由  $X \sim N(2, p)$  知

$$P\{X=0\} = C_2^0 p^0 (1-p)^2 = (1-p)^2,$$

$$P\{X=1\} = C_2^1 p^1 (1-p)^{2-1} = 2p(1-p).$$

又  $P\{X=0\} = P\{X=1\}$ ,

故可得

$$P\{X=0\} = (1-p)^2 = P\{X=1\} = 2p(1-p)$$

即  $(1-p)^2 = 2p(1-p)$

解之, 得  $p = \frac{1}{3}$ .

例 2.2 已知  $F(x)$  是分布函数, 下列函数是否可以作为分布函数?

(1)  $aF(x)$  ( $a > 0, a \neq 1$ ); (2)  $F(x) + F(-x)$ .

【分析与解答】由分布函数的性质,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0,$$

故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} aF(x) = a \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = a \cdot 1 = a,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [F(x) + F(-x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) + \lim_{x \rightarrow -\infty} F(-x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0 + 1 = 1 \neq 0,$$

从而上述两个分布函数都不可以作为分布函数.

例 2.3 设随机变量  $X$  的概率密度函数为

$$f(x) = \frac{C}{1+x^2},$$

试求未知参数  $C$ , 并计算  $P\{X > 1\}$ .

【分析与解答】由概率密度函数的性质,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} C \arctan A - \lim_{A \rightarrow -\infty} C \arctan A \\ &= C \cdot \frac{\pi}{2} - C \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = C\pi = 1, \end{aligned}$$

故可得  $C = \frac{1}{\pi}$ ,

从而有,

$$\begin{aligned} P\{X > 1\} &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \arctan A - \frac{1}{\pi} \arctan 1 \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

例 2.4 设随机变量  $X \sim N(2, 3^2)$ , (1) 计算  $P\{X > 2\}$ ;

(2) 求最小的常数  $c$ , 使得  $P\{X > c\} \geq 0.1587$ .

【分析与解答】正态变量可以化为标准正态变量. 设随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x)$ , 则

(1)  $P\{X > 2\} = 1 - F(2) = 1 - \Phi\left(\frac{2-2}{3}\right) = 1 - \Phi(0) = 1 - 0.5 = 0.5,$

$$(2) \quad P\{X > c\} = 1 - F(c) = 1 - \Phi\left(\frac{c-2}{2}\right) \geq 0.1587$$

即  $1 - \Phi\left(\frac{c-2}{2}\right) \geq 1 - 0.8413 = 1 - \Phi(1),$

从而  $\Phi\left(\frac{c-2}{2}\right) \leq \Phi(1),$

于是,  $\frac{c-2}{2} \geq 1,$

从而可得  $c \geq 4.$

例 2.5 设随机变量  $X \sim N(0,1)$ , 试求  $Y = 2X^2 + 1$  的概率密度函数.

【分析与解答】由题意知, 随机变量的概率密度函数为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < +\infty,$$

故  $Y = 2X^2 + 1$  在  $[1, +\infty)$  上取值. 于是

当  $y \leq 1$  时,  $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = 0.$

当  $y > 1$  时,  $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{2X^2 + 1 \leq y\}$

$$\begin{aligned} &= P\left\{-\sqrt{\frac{y-1}{2}} \leq X \leq \sqrt{\frac{y-1}{2}}\right\} \\ &= F_X\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right) - F_X\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right) \end{aligned}$$

对上式两端关于  $y$  求导, 可得

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right) \frac{1}{\sqrt{4(y-1)}} - f_X\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right) \left(-\frac{1}{\sqrt{4(y-1)}}\right) \\ &= 2f_X\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right) \frac{1}{\sqrt{4(y-1)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(y-1)}} e^{-\frac{y-1}{4}}, \end{aligned}$$

于是  $Y = 2X^2 + 1$  的概率密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi(y-1)}} e^{-\frac{y-1}{4}}, & y > 1, \\ 0, & y \leq 1. \end{cases}$$

## 二 习题答案

### 2-2 离散型随机变量及其概率分布

(1) 解 随机变量  $X$  的可能取值为 3, 4, 5, 且

$$P\{X=3\} = \frac{1}{C_5^3} = \frac{1}{10},$$

$$P\{X=4\} = \frac{C_3^2}{C_5^3} = \frac{3}{10},$$

$$P\{X=5\} = \frac{C_4^2}{C_5^3} = \frac{6}{10},$$

即随机变量  $X$  的分布律为

$X$	3	4	5
$P$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

(2) 解 ①  $P\{X=1 \text{ 或者 } X=2\} = P\{X=1\} + P\{X=2\} = \frac{1}{15} + \frac{2}{15} = \frac{1}{5};$

②  $P\{\frac{1}{2} < X < \frac{5}{2}\} = P\{X=1 \text{ 或者 } X=2\} = P\{X=1\} + P\{X=2\} = \frac{1}{15} + \frac{2}{15} = \frac{1}{5};$

③  $P\{1 \leq X \leq 2\} = P\{X=1 \text{ 或者 } X=2\} = P\{X=1\} + P\{X=2\} = \frac{1}{15} + \frac{2}{15} = \frac{1}{5}.$

(3) 解 设任一时刻  $t$  正在被使用的设备数为随机变量  $X$ , 则

$$X \sim B(5, 0.1),$$

于是

①  $P\{X=2\} = C_5^2(0.1)^2(1-0.1)^{5-2} = C_5^2(0.1)^2(1-0.1)^3 = 0.0729;$

②  $P\{X \geq 3\} = P\{X=3\} + P\{X=4\} + P\{X=5\}$   
 $= C_5^3(0.1)^3(1-0.1)^2 + C_5^4(0.1)^4(1-0.1)^1 + C_5^5(0.1)^5(1-0.1)^0$   
 $= 0.0081 + 0.00045 + 0.00001 = 0.00127;$

③  $P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X=0\}$   
 $= 1 - C_5^0(0.1)^0(1-0.1)^5 = 1 - 0.5049 = 0.4951.$

(4) 解 设该电话一小时收到的呼叫次数为  $X$ , 则

$$X \sim P(4).$$

从而 ①  $P\{X=8\} = \frac{4^8}{8!} e^{-4};$

$$\textcircled{2} P\{X > 3\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\} - P\{X = 2\} - P\{X = 3\}$$

$$\begin{aligned} &= 1 - \frac{4^0}{0!}e^{-4} - \frac{4^1}{1!}e^{-4} - \frac{4^2}{2!}e^{-4} - \frac{4^3}{3!}e^{-4} \\ &= 1 - e^{-4} - 4e^{-4} - 8e^{-4} - \frac{32}{3}e^{-4} = 1 - \frac{71}{3}e^{-4}. \end{aligned}$$

(5) 解  $X$  的所有可能取值为 0, 1, 2, 且

$$P\{X = 0\} = \frac{C_{13}^3}{C_{15}^3} = \frac{286}{455},$$

$$P\{X = 1\} = \frac{C_{13}^2 C_2^1}{C_{15}^3} = \frac{156}{455},$$

$$P\{X = 2\} = \frac{C_{13}^1 C_2^2}{C_{15}^3} = \frac{13}{455}.$$

$Y$  的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 且

$$P\{Y = 0\} = \frac{13 \times 13 \times 13}{15 \times 15 \times 15} = \frac{2197}{3375},$$

$$P\{Y = 1\} = \frac{C_3^1 \times 2 \times 13 \times 13}{15 \times 15 \times 15} = \frac{1014}{3375},$$

$$P\{Y = 2\} = \frac{C_3^2 \times 2 \times 2 \times 13}{15 \times 15 \times 15} = \frac{156}{3375},$$

$$P\{Y = 3\} = \frac{C_3^3 \times 2 \times 2 \times 2}{15 \times 15 \times 15} = \frac{8}{3375}.$$

(6) 解 ① 设需要的次数为  $X$ , 则

$$P\{X = k\} = pq^{k-1}, k = 1, 2, \dots;$$

② 设需要的次数为  $X$ , 则  $\{X = k\}$  说明前  $k-1$  次试验成功  $r-1$  次, 失败  $k-r$  次, 且第  $k$  次试验一定是成功的, 于是

$$P\{X = k\} = C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r}, k = r+1, r+2, \dots$$

(7) 解 由题意知,  $X \sim P\left(\frac{1}{2}t\right)$ , 于是

① 设 12 时到 15 时收到的紧急呼叫次数为  $X_1$ , 则

$$X_1 \sim P\left(\frac{3}{2}\right),$$

故 
$$P\{X=0\} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^0}{0!} e^{-\frac{3}{2}} = e^{-\frac{3}{2}};$$

② 设 12 时到 17 时收到的紧急呼叫次数为  $X_2$ ，则

$$X_2 \sim P\left(\frac{5}{2}\right),$$

故 
$$P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X=0\} = 1 - \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^0}{0!} e^{-\frac{5}{2}} = 1 - e^{-\frac{5}{2}}.$$

(8) 解  $\{X=k\}$  说明前  $k-1$  次一直出现正面，第  $k$  次出现反面或者前  $k-1$  次一直出现反面，第  $k$  次出现正面，于是

$$P\{X=k\} = p^{k-1}(1-p) + p(1-p)^{k-1}, k=2,3,\dots$$

(9) 解 10 个球放入 12 个盒子，共有  $12^{10}$  种方法. 空盒子数目为 10，说明取出两个盒子放球，其它 10 个盒子不放球，从而所求概率为

$$\begin{aligned} p &= \frac{C_{12}^2(C_{10}^9 + C_{10}^8 + C_{10}^7 + C_{10}^6 + C_{10}^5 + C_{10}^4 + C_{10}^3 + C_{10}^2 + C_{10}^1)}{12^{10}} \\ &= \frac{C_{12}^2(2^{10} - 2)}{12^{10}} = 1.089 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

(10) 参考 P28 例 2.2.5

(11) 解 这是一个 Bayes 公式问题，设一个人患感冒次数为  $X$ ，于是

$$\begin{aligned} P\{\lambda=3|X=2\} &= \frac{P\{\lambda=3\}P\{X=2|\lambda=3\}}{P\{\lambda=3\}P\{X=2|\lambda=3\} + P\{\lambda=5\}P\{X=2|\lambda=5\}} \\ &= \frac{0.75 \times P\{X=2|\lambda=3\}}{0.75 \times P\{X=2|\lambda=3\} + 0.25 \times P\{X=2|\lambda=5\}} = \frac{0.75 \times \frac{3^2}{2!} e^{-3}}{0.75 \times \frac{3^2}{2!} e^{-3} + 0.25 \times \frac{5^2}{2!} e^{-5}} \\ &= \frac{279e^{-3}}{27e^{-3} + 25e^{-5}}. \end{aligned}$$

### 2-3 随机变量的分布函数

$$(1) \text{ 解 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ p, & 0 < x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$(2) \text{ 解 } \textcircled{1} P\{X = a\} = P\{X \leq a\} - P\{X < a\} = F(a) - F(a-);$$

$$\textcircled{2} F(a-);$$

$$\textcircled{3} 1 - F(a-);$$

$$\textcircled{4} 1 - F(a).$$

$$(3) \text{ 解 } \textcircled{1} P\{X \leq 1\} = F(1) = 1;$$

$$\textcircled{2} P\{X < 1\} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} P\{X \leq 1 - \Delta x\} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} F(1 - \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{5(1 - \Delta x) + 7}{16} = \frac{3}{4};$$

$$\textcircled{3} P\{X = 1\} = P\{X \leq 1\} - P\{X < 1\} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

$$(4) \text{ 解 } \textcircled{1} F(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 单调递增, 所以不可以作为分布函数};$$

$$\textcircled{2} F(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 单调递减, 所以不可以作为分布函数};$$

$$\textcircled{3} \text{ 若令 } F(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & -\infty < x < 0, \\ 1, & 0 < x < +\infty \end{cases} \text{ 则 1) } F(x) \text{ 在 } [-\infty, +\infty) \text{ 单调不减, 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad 0 \leq F(x) \leq 1 \quad 3) F(x) \text{ 在 } [-\infty, +\infty) \text{ 的任一点上都右连}$$

$$\text{续, 故 } F(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & -\infty < x < 0, \\ 1, & 0 < x < +\infty \end{cases} \text{ 可以作为一个分布函数.}$$

(5)  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$  都是一个随机变量的分布函数, 故均满足分布函数的特征, 从而

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow \infty} [F_1(x) + F_2(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} F_1(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} F_2(x) = 1 + 1 = 2, \text{ 所以它不是分布函数};$$

$\textcircled{2}$  设  $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ , 则根据  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$  都是一个随机变量的分布函数以及分布函数的性质, 很容易验证:

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x) \text{ 在 } [-\infty, +\infty) \text{ 单调不减};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad 0 \leq F(x) \leq 1;$$

$F(x)$ 在 $[-\infty, +\infty)$ 的任一点上都是右连续.

从而它可以作为一个随机变量的分布函数.

#### 2-4 连续型随机变量及其概率密度

(1) 解①  $P\{X < 2\} = \ln 2$ ,  $P\{0 < X \leq 3\} = F(3) - F(0) = 1 - 0 = 1$ ,

$$P\{2 < X \leq \frac{5}{2}\} = F(\frac{5}{2}) - F(2) = \ln \frac{5}{2} - \ln 2 = \ln \frac{5}{4}.$$

$$\textcircled{2} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 1 < x < e, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(2) 解  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [A + B \arctan x] = A + B \times \frac{\pi}{2} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [A + B \arctan x] = A - B \times \frac{\pi}{2} = 0$$

解上述两个方程组成的方程组, 得

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{2}{\pi}.$$

从而相应的概率密度函数为  $f(x) = \frac{2}{\pi(1+x^2)}$ .

(3) 解 利用  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ , 可得

$$\textcircled{1} \int_{-\infty}^0 Ae^x dx + \int_0^{+\infty} Ae^{-x} dx = \frac{A}{2} + \frac{A}{2}, \text{ 从而 } A = \frac{1}{2};$$

同理  $\textcircled{2} A = \frac{1}{2}$ ;  $\textcircled{3} \frac{6}{29}$ .

(4) 解  $\textcircled{1}$  当  $x \leq 0$  时,  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$ ;

当  $0 < x \leq 1$  时,  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^0 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = \int_0^x tdt = \frac{x^2}{2}$ ;

当  $1 < x \leq 2$  时,  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^0 f(t)dt + \int_0^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt$

$$= \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^1 tdt + \int_1^x (2-t)dt = \frac{1}{2} + [(2x - \frac{x^2}{2}) - (2 - \frac{1}{2})]$$

$$= \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^1 tdt + \int_1^x (2-t)dt = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1;$$

当  $x \geq 2$  时,  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^0 f(t)dt + \int_0^1 f(t)dt + \int_1^2 f(t)dt + \int_2^x f(t)dt = 1$ ;

综上所述 
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{x^2}{2}, & 0 < x \leq 1; \\ -\frac{x^2}{2} + 2x - 1, & 1 < x \leq 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

②  $P\{X < 0.5\} = F(0.5) = 0.125$ ,  $P\{X > 1.3\} = 1 - F(1.3) = 0.245$ ,

$P\{0.2 < X < 1.2\} = F(1.2) - F(0.2) = 0.66$ .

(5) 解 由题意,  $\xi \sim f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & 0 < x < 5, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$

而  $\{\text{方程有实根}\}$  等价于  $\{16\xi^2 - 16(\xi + 2) \geq 0\}$ ,

即  $\{\text{方程有实根}\}$  等价于  $\{\xi \leq -1 \text{ 或者 } \xi \geq 2\}$ ,

故方程有实根的概率为

$$P\{\xi \leq -1 \text{ 或者 } \xi \geq 2\} = P\{\xi \leq -1\} + P\{\xi \geq 2\} = \int_2^5 \frac{1}{5} dx = \frac{3}{5}.$$

(6) 该顾客未等到服务而离开窗口的概率为

$$P\{X \geq 10\} = \int_{10}^{+\infty} \frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}} dx = e^{-2}.$$

由题意, 随机变量  $Y \sim B(5, e^{-2})$ , 从而有

$$P\{Y = k\} = C_5^k (e^{-2})^k (1 - e^{-2})^{5-k}, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5,$$

从而  $P\{Y = 0\} = 1 - (1 - e^{-2})^5$ .

(7) ①  $P\{2 < X < 5\} = F(5) - F(2) = \Phi\left(\frac{5-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{2-3}{2}\right)$

$$= \Phi(1) - \Phi(-0.5) = \Phi(1) - 1 + \Phi(0.5) = 0.5328,$$

同理  $P\{-4 < X \leq 10\} = 0.9996$ ,

$$P\{|X| > 2\} = 1 - P\{|X| \leq 2\} = 1 - P\{-2 < X < 2\} = 1 - \Phi\left(\frac{2-3}{2}\right) + \Phi\left(\frac{-2-3}{2}\right) = 0.6977,$$

$$P\{X < 3\} = F(3) = \Phi(0) = 0.5.$$

②  $P\{X < c\} = F(c) = \Phi\left(\frac{c-3}{2}\right)$ ,  $P\{X > c\} = 1 - F(c) = \Phi\left(\frac{3-c}{2}\right)$ , 故有

$$\frac{c-3}{2} = \frac{3-c}{2},$$

解之, 得  $c = 3$

③  $P\{X > d\} = 1 - P\{X \leq d\} = 1 - \Phi\left(\frac{d-3}{2}\right) = \Phi\left(\frac{3-d}{2}\right) \geq 0.90 = \Phi(1.282)$

故有  $\frac{3-d}{2} \geq 1.282$ ,

解之, 得  $d \leq 0.436$ .

$$\begin{aligned} (8) \text{ 解 } P\{120 < X \leq 200\} &= F(200) - F(120) = \Phi\left(\frac{200-160}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{120-160}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-40}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - 1 \geq 0.8, \end{aligned}$$

即  $\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) \geq 0.9 = \Phi(1.282)$ ,

解之, 得  $\sigma \leq 31.2$

$$\begin{aligned} (9) \text{ 解 } \textcircled{1} F(-a) &= \int_{-\infty}^{-a} f(t) dt \stackrel{x=-t}{=} - \int_{+\infty}^a f(-x) dx = \int_a^{+\infty} f(-x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx; \\ &= 1 - \int_{-\infty}^a f(x) dx = 1 - F(a) \end{aligned}$$

且由上式, 可得

$$F(-a) = 1 - \int_{-\infty}^a f(x) dx = 1 - \int_{-\infty}^0 f(x) dx - \int_0^a f(x) dx = \frac{1}{2} - \int_0^a f(x) dx;$$

② 由①,  $P\{|X| < a\} = F(a) - F(-a) = F(a) - 1 + F(a) = 2F(a) - 1$ ;

③ 由②,  $P\{|X| > a\} = 1 - P\{|X| < a\} = 1 - [2F(a) - 1] = 2[1 - F(a)]$ .

(10) 解 当  $x \leq 0$  时,  $F(x) = P\{X = OP \leq x\} = 0$ ;

当  $x \geq R$  时,  $F(x) = P\{X = OP \leq x\} = 1$ ;

当  $0 \leq x \leq R$  时,  $F(x) = P\{X = OP \leq x\} = \frac{\pi x^2}{\pi R^2} = \frac{x^2}{R^2}$ ;

故有 
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{x^2}{R^2}, & 0 < x < R; \\ 1, & x \geq R. \end{cases}$$

$$(12) 1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \left(-\frac{1}{t}\right) \left(-te^{-\frac{t^2}{2}}\right) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \left(-\frac{1}{t}\right) d\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{t} e^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_x^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \left(\frac{1}{t^2}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (i) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \left(-\frac{1}{t^3}\right) \left(-te^{-\frac{t^2}{2}}\right) dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \left(-\frac{1}{t^3}\right) d\left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}} - \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x^3} e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \left(\frac{3}{t^4}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x^3} e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \left(\frac{3}{t^4}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (ii)
\end{aligned}$$

由 (i) (ii) 以及  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \left(\frac{1}{t^2}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} \left(\frac{3}{t^4}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  均为非负, 可得命题证明.

## 2-5 随机变量函数的分布

(1) 解

$Y = 2X$	-4	-2	0	2	6
$P$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$

$Z = X^2 + 1$	1	2	5	10
$P$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{30}$

(2) 解① 由于  $X \sim f_x(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$  所以  $Y = e^X$  在  $(1, e)$  上取值, 故

当  $y \leq 1$  时,  $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = 0$ , 此时  $f_Y(y) = 0$ ;

当  $1 < y < e$  时,  $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{e^X \leq y\} = P\{X \leq \ln y\} = F_X(\ln y)$ ,

对上式两端关于  $y$  求导, 可得

$$f_Y(y) = f_X(\ln y) \times \frac{1}{y} = \frac{1}{y};$$

当  $y \geq e$  时,  $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = 1$ , 此时  $f_Y(y) = 0$ .

$$\text{故 } f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y}, & 1 < y < e, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

② 由于  $X \sim f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$  所以  $Y = -2\ln X$  在  $(0, +\infty)$  上取值, 故

当  $y \leq 0$  时,  $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = 0$ , 此时  $f_Y(y) = 0$ ;

当  $y > 0$  时,  $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{-2\ln X \leq y\} = P\{X \geq e^{-\frac{y}{2}}\} = 1 - F_X(e^{-\frac{y}{2}})$ ,

对上式两端关于  $y$  求导, 可得

$$f_Y(y) = -f_X(e^{-\frac{y}{2}}) \times \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}}.$$

$$\text{故 } f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

(3) 解① 由于  $X \sim f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ , 所以  $Y = e^X$  在  $(0, +\infty)$  上取值, 故

当  $y \leq 0$  时,  $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = 0$ , 此时  $f_Y(y) = 0$ ;

当  $y > 0$  时,  $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{e^X \leq y\} = P\{X \leq \ln y\} = F_X(\ln y)$ ,

对上式两端关于  $y$  求导, 可得

$$f_Y(y) = f_X(\ln y) \times \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}} \frac{1}{y}.$$

$$\text{故 } f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi} y} e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}, & y > 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

② 由于  $X \sim f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ , 所以  $Y = 2X^2 + 1$  在  $(1, +\infty)$  上取值, 故

当  $y \leq 1$  时,  $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = 0$ , 此时  $f_Y(y) = 0$ ;

当  $y > 1$  时,  $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{2X^2 + 1 \leq y\}$ ,

$$= P\{-\sqrt{\frac{y-1}{2}} \leq X \leq \sqrt{\frac{y-1}{2}}\} = F_X(\sqrt{\frac{y-1}{2}}) - F_X(-\sqrt{\frac{y-1}{2}})$$

对上式两端关于  $y$  求导, 可得

$$\begin{aligned} f_X(y) &= f_X(\sqrt{\frac{y-1}{2}}) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{y-1}{2}}} \times \frac{1}{2} + f_X(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{y-1}{2}}} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}} e^{-\frac{(\sqrt{\frac{y-1}{2}})^2}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}} e^{-\frac{y-1}{4}} \end{aligned}$$

$$\text{故 } f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}} e^{-\frac{y-1}{4}}, & y > 1, \\ 0, & y < 1. \end{cases}$$

③ 由于  $X \sim f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ , 所以  $Y = |X|$  在  $(0, +\infty)$  上取值, 故

当  $y \leq 0$  时,  $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = 0$ , 此时  $f_Y(y) = 0$ ;

当  $y > 0$  时,  $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{|X| \leq y\} = P\{-y \leq X \leq y\} = F_X(y) - F_X(-y)$ ,

对上式两端关于  $y$  求导, 可得

$$f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

$$\text{故 } f_Y(y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}}, & y > 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

(4) 解 由于  $X \sim f_X(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\pi^2}, & 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$  所以  $Y = \sin X$  在  $(0, 1)$  上取值, 故

当  $y \leq 0$  时,  $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = 0$ , 此时  $f_Y(y) = 0$ ;

当  $y > 1$  时,  $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = 1$ , 此时  $f_Y(y) = 0$ ;

当  $0 < y < 1$  时,  $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{\sin X \leq y\}$ ,

$$\begin{aligned} &= P\{0 \leq X \leq \arcsin y \text{ 或者 } \pi - \arcsin y \leq X \leq \pi\} \\ &= P\{0 \leq X \leq \arcsin y\} + P\{\pi - \arcsin y \leq X \leq \pi\} \\ &= F_X(\arcsin y) - F_X(0) + F_X(\pi) - F_X(\pi - \arcsin y) \end{aligned}$$

对上式两端关于  $y$  求导, 可得

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(\arcsin y)\sqrt{1-y^2} + f_X(\pi - \arcsin y)\sqrt{1-y^2} \\ &= \frac{2 \arcsin y}{\pi^2} \sqrt{1-y^2} + \frac{2(\pi - \arcsin y)}{\pi^2} \sqrt{1-y^2} = \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, \end{aligned}$$

故

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

(5) 解 由于  $X \sim f_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-98.6)^2}{4}}$ , 且  $H = \frac{5}{9}(t-32)$ , 故由定理 2.5.1,

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{9}{5}y + 32\right) \times \frac{9}{5} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(\frac{9}{5}y + 32 - 98.6)^2}{4}}$$

即

$$f_Y(y) = \frac{9}{10\sqrt{\pi}} e^{-\frac{81}{100}(y-37)^2}.$$

(6) 解 由于  $I \sim f_I(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 9 < x < 11, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$ , 所以  $W = 3I^2$  在  $(243, 363)$  上取值, 故

当  $0 < y < 1$  时,

$$\begin{aligned} F_w(y) &= P\{W \leq y\} = P\{3I^2 \leq y\} = P\left\{-\sqrt{\frac{y}{3}} \leq I \leq \sqrt{\frac{y}{3}}\right\} = P\{0 \leq I \leq \sqrt{\frac{y}{3}}\} \\ &= F_I\left(\sqrt{\frac{y}{3}}\right) - F_I(0), \end{aligned}$$

对上式两端关于  $y$  求导, 可得

$$F_w(y) = f_I(\sqrt{\frac{y}{3}}) \times \frac{1}{2} \times (\frac{y}{3})^{-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2\sqrt{12y}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (\frac{y}{3})^{-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2\sqrt{12y}}$$

从而

$$f_w(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{12y}}, & 234 < y < 363, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

(7) 解 由于  $f(x)$ , 所以  $Y = X^3$  在  $(-\infty, +\infty)$  上取值, 故

$$\text{时, } F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^3 \leq y\} = P\{-y^{\frac{1}{3}} \leq X \leq y^{\frac{1}{3}}\} = F_X(y^{\frac{1}{3}}) - F_X(-y^{\frac{1}{3}}),$$

对上式两端关于  $y$  求导, 可得

$$f_Y(y) = f(y^{\frac{1}{3}}) \times \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} + f(-y^{\frac{1}{3}}) \times \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} [f(y^{\frac{1}{3}}) + f(-y^{\frac{1}{3}})].$$

(8) 与例 2.5.4 类似.

$$\begin{aligned} (9) \quad P\{Y = k\} &= \sum_{i=k}^{+\infty} P\{Y = k | X = i\} P\{X = i\} \\ &= \sum_{i=k}^{+\infty} C_i^k p^k (1-p)^{i-k} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k (1-p)^{i-k} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{i-k}}{(i-k)!} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{\lambda(1-p)} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p} \end{aligned}$$

即

$$Y \sim P(\lambda p).$$

### 第三章 多维随机变量及其概率分布

#### 一 典型例题

例 3.1 设二维离散型随机变量的联合分布律为:

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	0	0.1	0.05	0.15
1	0.21	0.24	0	0.02
2	0.08	0.11	0.03	0.01

试求 (1)  $P\{X+Y \geq 4\}$ ; (2)  $F(0,1)$ ; (3) 关于随机变量  $X, Y$  的边缘分布律.

解 (1)  $P\{X+Y \geq 4\} = P\{X=1, Y=3\} + P\{X=2, Y=2\} + P\{X=2, Y=3\}$   
 $= 0.02 + 0.03 + 0.01 = 0.06;$

(2)  $F(0,1) = P\{X \leq 0, Y \leq 1\} = P\{X=0, Y=0\} + P\{X=0, Y=1\} = 0 + 0.0 = 0.1;$

(3) 关于随机变量  $X$  的边缘分布律为

$P\{X=0\} = P\{X=0, Y=0\} + P\{X=0, Y=1\} + P\{X=0, Y=2\} + P\{X=0, Y=3\}$   
 $= 0 + 0.1 + 0.05 + 0.15 = 0.3,$

$P\{X=1\} = P\{X=1, Y=0\} + P\{X=1, Y=1\} + P\{X=1, Y=2\} + P\{X=1, Y=3\}$   
 $= 0.21 + 0.24 + 0 + 0.02 = 0.47,$

$P\{X=2\} = P\{X=2, Y=0\} + P\{X=2, Y=1\} + P\{X=2, Y=2\} + P\{X=2, Y=3\}$   
 $= 0.08 + 0.11 + 0.03 + 0.01 = 0.23,$

或

$X$	0	1	2
$P$	0.3	0.47	0.23

同理可得随机变量  $Y$  的边缘分布律为

$Y$	0	1	2	3
$P$	0.29	0.45	0.08	0.18

例 3.2 设随机变量  $X$  和  $Y$  具有联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & x^2 \leq y \leq x, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

试求: (1) 常数  $c$ ; (2) 关于随机变量  $X$  和  $Y$  的边缘概率密度函数;

(3) 条件密度  $f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x)$ .

【分析与解答】(1) 由联合概率密度函数的性质知

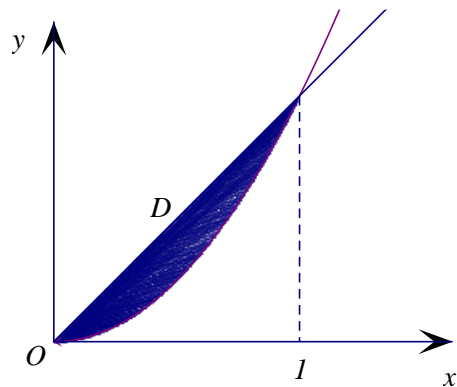
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1,$$

而  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \iint_D c dx dy$

$$= c \int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy = c \int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{c}{6}$$

其中  $D$  为右图阴影部分, 于是有

$$c = 6.$$



$$(2) \quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_{x^2}^x 6 dy = 6(x - x^2), & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^{\sqrt{y}} 6 dx = 6(\sqrt{y} - y), & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

(3) 当  $0 < y < 1$  时, 有

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{6}{6(\sqrt{y} - y)} = \frac{1}{\sqrt{y} - y}, & \sqrt{y} \leq x \leq y, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

当  $0 < x < 1$  时, 有

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{6}{6(x - x^2)} = \frac{1}{x - x^2}, & y^2 \leq x \leq y, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

例 3.3 设随机变量  $X$  和  $Y$  相互独立且都服从参数为  $\frac{1}{2}$  的两点分布, 定义随机变

量  $Z = \begin{cases} 1, & \text{当 } X+Y \text{ 为偶数,} \\ 0, & \text{当 } X+Y \text{ 为奇数.} \end{cases}$  试求 (1)  $Z$  的概率分布; (2)  $(X, Z)$  的联合概率分

布; (3)  $X, Z$  是否相互独立.

【分析与解答】由题意知,

$$P\{X=0, Y=0\} = P\{X=0\}P\{Y=0\} = \frac{1}{4},$$

$$P\{X=0, Y=1\} = P\{X=0\}P\{Y=1\} = \frac{1}{4},$$

$$P\{X=1, Y=0\} = P\{X=1\}P\{Y=0\} = \frac{1}{4},$$

$$P\{X=1, Y=1\} = P\{X=1\}P\{Y=1\} = \frac{1}{4}.$$

从而

$$(1) \quad P\{Z=0\} = P\{X=0, Y=1\} + P\{X=1, Y=0\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$P\{Z=1\} = P\{X=0, Y=0\} + P\{X=1, Y=1\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2};$$

$$(2) \quad P\{X=0, Z=0\} = P\{X=0\}P\{Z=0|X=0\} = P\{X=0\}P\{Y=1\} = \frac{1}{4},$$

$$P\{X=0, Z=1\} = P\{X=0\}P\{Z=1|X=0\} = P\{X=0\}P\{Y=0\} = \frac{1}{4},$$

$$P\{X=1, Z=1\}=P\{X=1\}P\{Z=1|X=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{X=1, Z=0\}=P\{X=1\}P\{Z=0|X=1\}=P\{X=1\}P\{Y=0\}=\frac{1}{4}.$$

(3) 对任意的  $i, j=0,1$ , 有

$$P\{X=i, Z=j\}=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P\{X=i\}P\{Z=j\},$$

故可知, 两个随机变量  $X, Z$  相互独立.

例 3.4 设随机变量  $X$  的概率密度函数为  $f_X(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\leq 0. \end{cases}$  在  $X=x(x>0)$  的

条件下, 随机变量  $Y$  在区间  $(0, x)$  上服从均匀分布, 试求

- (1) 随机变量  $X$  和  $Y$  的联合概率密度函数;
- (2) 计算  $Z=X+Y$  的概率密度函数.

【分析与解答】(1) 由题意知, 在  $X=x(x>0)$  的条件下,  $Y$  的条件概率

$$f(x, y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases} e^{-x}, & 0<y<x, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

根据乘法公式得

$$f(x, y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases} e^{-x}, & 0<y<x, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

(2) 由卷积公式,

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)dx,$$

其中  $f(x, z-x)=\begin{cases} e^{-x}, & 0<z-x<x, \\ 0 \end{cases}$ , 即  $f(x, z-x)=\begin{cases} e^{-x}, & 0<x<z<2x, \\ 0 \end{cases}$ ,

于是知, 当  $z\leq 0$  时,  $f_Z(z)=0$ ;

当  $z>0$  时,  $f_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^z e^{-x}dx=e^{-\frac{z}{2}}-e^{-z}$ ;

综上, 可得  $f_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^z e^{-x}dx=\begin{cases} e^{-\frac{z}{2}}-e^{-z}, & z>0, \\ 0, & z\leq 0. \end{cases}$

## 二 习题答案

### 3-1 多维随机变量

(1) 解①有放回取样情况

$$P\{X=0, Y=0\}=\frac{2\times 2}{12\times 12}, P\{X=0, Y=1\}=\frac{2\times 10}{12\times 12},$$

$$P\{X=1, Y=0\} = \frac{10 \times 2}{12 \times 12}, \quad P\{X=1, Y=1\} = \frac{10 \times 10}{12 \times 12}.$$

②不放回取样情况

$$P\{X=0, Y=0\} = P\{X=0\}P\{Y=0|X=0\} = \frac{2}{12} \times \frac{1}{11},$$

同理, 可得

$$P\{X=0, Y=1\} = \frac{2 \times 10}{12 \times 11},$$

$$P\{X=1, Y=0\} = \frac{10 \times 2}{12 \times 11},$$

$$P\{X=1, Y=1\} = \frac{10 \times 9}{12 \times 11}.$$

(2)  $X$  的所有可能取值为 0, 1, 2,  $Y$  的所有可能取值为 0, 1, 2, 3,

令  $H, T$  分别表示正面反面出现, 则

$$P\{X=0, Y=0\} = P\{(T, T, T)\} = \frac{1}{8},$$

$$P\{X=0, Y=1\} = P\{(T, T, H)\} = \frac{1}{8}$$

$$P\{X=1, Y=1\} = P\{(H, T, T), (T, H, T)\} = \frac{2}{8},$$

$$P\{X=1, Y=2\} = P\{(H, T, H), (T, H, H)\} = \frac{2}{8},$$

$$P\{X=2, Y=2\} = P\{(H, H, T)\} = \frac{1}{8},$$

$$P\{X=2, Y=3\} = P\{(H, H, H)\} = \frac{1}{8}.$$

(3) . 解

①由于 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1,$$

即 
$$\int_0^2 \int_2^4 k(6-x-y) dy dx = \int_0^2 dx \int_2^4 k(6-x-y) dy = k \int_0^2 (6-2x) dx = 8k,$$

故 
$$k = \frac{1}{8}.$$

②由概率密度函数的性质,

$$\begin{aligned} P\{X < 1, Y < 3\} &= \int_{-\infty}^1 \int_{-\infty}^3 f(x, y) dy dx \\ &= \int_0^1 dx \int_2^3 \frac{1}{8}(6-x-y) dy \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 \left(\frac{7}{2} - x\right) dx = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

③由概率密度函数的性质,

$$P\{X < 1.5\} = \int_{-\infty}^1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{1.5} dx \int_2^4 \frac{1}{8}(6-x-y)dy \\
&= \frac{1}{8} \int_0^{1.5} (6-2x)dx = \frac{27}{32}.
\end{aligned}$$

④由概率密度函数的性质,  $P\{X+Y < 4\} = \int \int_{x+y \leq 4} f(x,y)dydx$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} \int_0^2 dx \int_2^{4-x} (6-x-y)dy \\
&= \frac{1}{8} \int_0^2 [6-4x + \frac{x^2}{2}]dx \\
&= \frac{1}{8} [6x - 2x^2 + \frac{x^3}{6}]_0^2 = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

(4) 解由例3  $P\{X=m, Y=n, Z=k\} = \frac{4!}{m!n!k!} (0.5)^m (0.3)^n 0.2^k$ ,

$m+n+k=4$ ,

比如

$$P\{X=4, Y=0, Z=0\} = \frac{4!}{4!0!0!} (0.5)^4 (0.3)^0 0.2^0 = 0.0625,$$

$$P\{X=3, Y=1, Z=0\} = \frac{4!}{3!1!0!} (0.5)^3 (0.3)^1 0.2^0 = 0.15,$$

$$P\{X=2, Y=1, Z=1\} = \frac{4!}{2!1!1!} (0.5)^2 (0.3)^1 0.2^1 = 0.018$$

等

(5) 解

这两个元件的寿命X和Y的联合概率密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} 0.01^2 e^{-0.01(x+y)}, & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

于是所求概率为

$$\begin{aligned}
P\{X > 120, Y > 120\} &= \int_{120}^{+\infty} \int_{120}^{+\infty} f(x,y)dx dy \\
&= \int_{120}^{+\infty} \int_{120}^{+\infty} 0.01^2 e^{-0.01(x+y)} dx dy \\
&= \int_{120}^{+\infty} 0.01 e^{-0.01x} dx \int_{120}^{+\infty} 0.01 e^{-0.01y} dy \\
&= e^{-2.4}
\end{aligned}$$

(6) 解

由于  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx dy = 1$ ,

$$\begin{aligned}
\text{即} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{\pi^2(16+x^2)(25+y^2)} dy dx \\
&= A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(25+y^2)} dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(16+x^2)} dx
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{20}A$$

故  $A = 20$ .

从而  $(X, Y)$  的联合分布函数为

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) dv du \\ &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \frac{20}{\pi^2(16+u^2)(25+v^2)} dv du \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{4} \frac{1}{\pi(1+(\frac{u}{4})^2)} du \int_{-\infty}^y \frac{1}{5} \frac{1}{\pi(1+(\frac{v}{5})^2)} dv \\ &= \frac{1}{\pi^2} (\arctan \frac{x}{4} + \frac{\pi}{4}) (\arctan \frac{y}{5} + \frac{\pi}{5}) \\ \text{即 } F(x, y) &= \frac{1}{\pi^2} (\arctan \frac{x}{4} + \frac{\pi}{4}) (\arctan \frac{y}{5} + \frac{\pi}{5}). \end{aligned}$$

(7) 解 所求概率为

$$\begin{aligned} P\{0.004 < Y - X < 0.036\} &= \int \int_{0.004 < y-x < 0.036} f(x, y) dx dy \\ &= \int \int_{D_1} f(x, y) dy dx + \int \int_{D_2} f(x, y) dy dx + \int \int_{D_3} f(x, y) dy dx \\ &= \int \int_{D_1} 2500 dy dx + \int \int_{D_2} 2500 dy dx + \int \int_{D_3} 2500 dy dx \\ &= \int_{0.49}^{0.494} dx \int_{0.51}^{0.036+x} 2500 dy + \int_{0.494}^{0.506} dx \int_{0.51}^{0.53} 2500 dy + \int_{0.506}^{0.51} dx \int_{0.004+x}^{0.53} 2500 dy \\ &= 2500 \int_{0.49}^{0.494} (x - 0.474) dx + 2500 \times 0.02 \times 0.012 + 2500 \int_{0.506}^{0.51} (0.526 - x) dx \\ &= 0.18 + 0.6 + 0.18 \\ &= 0.96 \end{aligned}$$

### 3-2 边缘分布

(1) 解①有放回取样情况

关于  $X$  的边际分布律为

$$P\{X = 0\} = P\{X = 0, Y = 0\} + P\{X = 0, Y = 1\} = \frac{2}{12},$$

$$P\{X = 1\} = P\{X = 1, Y = 0\} + P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{10}{12}.$$

关于  $Y$  的边际分布律为

$$P\{Y = 0\} = P\{X = 0, Y = 0\} + P\{X = 1, Y = 0\} = \frac{2}{12},$$

$$P\{Y = 1\} = P\{X = 0, Y = 1\} + P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{10}{12}.$$

②不放回取样情况

关于  $X$  的边际分布律为

$$P\{X = 0\} = P\{X = 0, Y = 0\} + P\{X = 0, Y = 1\} = \frac{2}{12},$$

$$P\{X = 1\} = P\{X = 1, Y = 0\} + P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{10}{12}.$$

关于  $Y$  的边际分布律为

$$P\{Y = 0\} = P\{X = 0, Y = 0\} + P\{X = 1, Y = 0\} = \frac{2}{12},$$

$$P\{Y = 1\} = P\{X = 0, Y = 1\} + P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{10}{12}.$$

(2) 解  $X$  的所有可能取值为 0, 1, 2, 3,  $Y$  的所有可能取值为 1, 3, 故二维随机变量  $(X, Y)$  的联合分布律为

$$P\{X = 0, Y = 3\} = P\{\text{反面出现三次}\} = \frac{1}{8},$$

$$P\{X = 1, Y = 1\} = P\{\text{正面出现一次, 反面出现两次}\} = \frac{3}{8},$$

$$P\{X = 2, Y = 1\} = P\{\text{正面出现两次, 反面出现一次}\} = \frac{3}{8},$$

$$P\{X = 3, Y = 3\} = P\{\text{正面出现三次}\} = \frac{1}{8}.$$

故关于  $X$  的边缘分布律为

$$P\{X = 0\} = P\{X = 0, Y = 1\} + P\{X = 0, Y = 3\} = 0 + \frac{1}{8} = \frac{1}{8},$$

$$P\{X = 1\} = P\{X = 1, Y = 1\} + P\{X = 1, Y = 3\} = \frac{3}{8} + 0 = \frac{3}{8},$$

$$P\{X = 2\} = P\{X = 2, Y = 1\} + P\{X = 2, Y = 3\} = \frac{3}{8} + 0 = \frac{3}{8},$$

$$P\{X = 3\} = P\{X = 3, Y = 1\} + P\{X = 3, Y = 3\} = 0 + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}.$$

关于  $Y$  的边缘分布律为

$$P\{Y = 1\} = P\{X = 0, Y = 1\} + P\{X = 1, Y = 1\} + P\{X = 2, Y = 1\} \\ + P\{X = 3, Y = 1\} = 0 + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + 0 = \frac{6}{8},$$

$$P\{Y = 3\} = P\{X = 0, Y = 3\} + P\{X = 1, Y = 3\} + P\{X = 2, Y = 3\} \\ + P\{X = 3, Y = 3\} = \frac{1}{8} + 0 + 0 + \frac{1}{8} = \frac{2}{8}.$$

即

$Y \backslash X$	0	1	2	3	$P\{Y = j\}$
1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{6}{8}$
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$
$P\{X = i\}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	

(3) 解

① 由于 
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1,$$

即 
$$\int_0^1 \int_0^2 axy^2 dy dx = a \int_0^1 x dx \int_0^2 y^2 dy = \frac{4}{3} a,$$

故 
$$a = \frac{3}{4}.$$

② 关于随机变量  $X$  的边缘概率密度函数:

当  $x \geq 1$  或者  $x \leq 0$  时, 有  $f(x, y) = 0$ , 故

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = 0,$$

$0 < x < 1$  时,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^2 \frac{3}{4} xy^2 dy = 2x,$$

故关于随机变量  $X$  的边缘概率密度函数为 
$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x \leq 0 \text{ 或者 } x \geq 1. \end{cases}$$

下面计算关于随机变量  $Y$  的边缘概率密度函数:

当  $y \geq 2$  或者  $y \leq 0$  时, 有  $f(x, y) = 0$ , 故

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = 0,$$

$0 < y < 2$  时,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_0^1 \frac{3}{4} xy^2 dy = \frac{3}{8} y^2,$$

故关于随机变量  $Y$  的边缘概率密度函数为 
$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{8} y^2, & 0 < y < 2, \\ 0, & y \leq 0 \text{ 或者 } y \geq 2. \end{cases}$$

(4) 解关于随机变量  $X$  的边缘概率密度函数为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^x 4.8y(2-x) dy = 2.4x^2(2-x), & 0 < x < 1, \\ 0, & x \leq 0 \text{ 或者 } x \geq 1. \end{cases}$$

关于随机变量  $Y$  的边缘概率密度函数为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^1 4.8y(2-x) dx = 4.8y\left(\frac{3}{2} - 2y + \frac{y^2}{2}\right), & 0 < y < 1, \\ 0, & y \leq 0 \text{ 或者 } y \geq 1. \end{cases}$$

(5) 解

关于随机变量  $X$  的边缘概率密度函数为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_x^{+\infty} e^{-y} dy = e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

关于随机变量 $Y$ 的边缘概率密度函数为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^y e^{-y} dx = ye^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

(6) 解①

由于  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$ ,

$$\begin{aligned} \text{即 } 1 &= \int \int_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} cx^2 y dx = c \int_0^1 y \times \frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} dy = \frac{4}{3}c, \\ &= \int_0^1 \times \frac{2y^{\frac{5}{2}}}{3} dy = \frac{4}{21}c \end{aligned}$$

从而  $c = \frac{21}{4}$

②关于随机变量 $X$ 的边缘概率密度函数为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_{x^2}^1 \frac{21}{4} x^2 y dy = \frac{21}{8} x^2 (1 - x^4), & -1 < x < 1, \\ 0, & x \geq 1 \text{ 或者 } x \leq -1. \end{cases}$$

关于随机变量 $Y$ 的边缘概率密度函数为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{21}{4} x^2 y dx = \frac{7}{2} y^{\frac{5}{2}}, & 0 < y < 1, \\ 0, & y \leq 0 \text{ 或者 } y \geq 1. \end{cases}$$

(7) 解

由题意, 二维随机变量的概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{a^2}, & (x, y) \in G, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

关于随机变量 $X$ 的边缘概率密度函数为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_{-x-\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{x+\frac{\sqrt{2}}{2}a} \frac{1}{a^2} dy = \frac{1}{a^2} (2x + \sqrt{2}a), & -\frac{\sqrt{2}}{2}a < x < 0, \\ \int_{x-\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{-x+\frac{\sqrt{2}}{2}a} \frac{1}{a^2} dy = \frac{1}{a^2} (-2x + \sqrt{2}a), & 0 \leq x < \frac{\sqrt{2}}{2}a, \\ 0, & |x| > \frac{\sqrt{2}}{2}a. \end{cases}$$

关于随机变量 $Y$ 的边缘概率密度函数为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_{-y-\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{y-\frac{\sqrt{2}}{2}a} \frac{1}{a^2} dx = \frac{1}{a^2}(-2y + \sqrt{2}a), & -\frac{\sqrt{2}}{2}a < y < 0, \\ \int_{-y-\frac{\sqrt{2}}{2}a}^{y+\frac{\sqrt{2}}{2}a} \frac{1}{a^2} dx = \frac{1}{a^2}(2y + \sqrt{2}a), & 0 \leq y < \frac{\sqrt{2}}{2}a, \\ 0, & |y| > \frac{\sqrt{2}}{2}a. \end{cases}$$

### 3-3 条件分布

(1) 解 ①

$X$	51	52	53	54	55
$P$	0.18	0.15	0.35	0.12	0.20

$Y$	51	52	53	54	55
$P$	0.28	0.28	0.22	0.09	0.13

②

$Y=i$	51	52	53	54	55
$P\{Y=i   X=51\}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$

(3) 解①当  $y > 0$  时,  $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{y}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$

当  $Y = \frac{1}{2}$  时,  $X$  的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

②当  $x > 0$  时,  $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} e^{-y}, & y > x, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$

当  $X = \frac{1}{2}$  时,  $X$  的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} e^{\frac{1}{2}-y}, & y > \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

当  $X = \frac{1}{3}$  时,  $X$  的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} e^{\frac{1}{3}-y}, & y > \frac{1}{3}, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

$$\textcircled{3} P\{Y \geq \frac{1}{4} | X = \frac{1}{2}\} = \int_{\frac{1}{4}}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x) dy = \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}-y} dy = 1.$$

$$P\{Y \geq \frac{3}{4} | X = \frac{1}{2}\} = \int_{\frac{3}{4}}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x) dy = \int_{\frac{3}{4}}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}-y} dy = e^{-\frac{1}{4}}$$

(4) 关于随机变量  $X$  的边缘概率密度函数为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy = \begin{cases} \int_{-x}^{+x} 1 dy = 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

关于随机变量  $Y$  的边缘概率密度函数为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx = \begin{cases} \int_{-y}^1 1 dx = 1+y, & -1 < y < 0, \\ \int_y^1 1 dx = 1-y, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

从而, 当  $0 < x < 1$  时, 有

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2x}, & |y| < x, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

当  $|y| < 1$  时, 有

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{1-|y|}, & x > |y|, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

$$\textcircled{6} f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy = \begin{cases} \int_{x^2}^1 \frac{21}{4} x^2 y dy = \frac{21}{8} x^2 (1-x^4), & -1 < x < 1, \\ 0, & x \geq 1 \text{ 或者 } x \leq -1. \end{cases}$$

当  $-1 < x < 1$  时, 有

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{2y}{1-x^4}, & x^2 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

### 3-4 随机变量的独立性

(1) 解 由联合分布律的性质知,  $\alpha + \beta = \frac{1}{3}$

由独立性知,  $P\{X=2, Y=2\} = \alpha = P\{X=2\}P\{Y=2\} = \frac{2}{3} \times (\frac{1}{9} + \alpha)$

联立上面两个方程, 解之, 得  $\alpha = \frac{2}{9}, \beta = \frac{1}{9}$ .

(2) 由  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 cxy^2 dx dy = \frac{c}{6} = 1$  可得

$$c = 6.$$

从而关于随机变量  $X$  的边缘概率密度函数为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^1 6xy^2 dy = 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

关于随机变量  $Y$  的边缘概率密度函数为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^1 6xy^2 dx = 3y^2, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

容易看出  $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ ,

从而两个随机变量  $X, Y$  相互独立.

(3) 3-3 第 (1) 题中

$$P\{X=51, Y=51\} = 0.06 \neq 0.18 \times 0.28 = P\{X=51\}P\{Y=51\}$$

从而两个随机变量  $X, Y$  不是相互独立的.

3-3 第 (4) 题, 也可以验证  $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ , 从而两个随机变量  $X, Y$  也不是相互独立的.

(4)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z) dy dz = \begin{cases} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{8\pi^3} (1 - \sin x \sin y \sin z) dy dz = \frac{1}{2\pi}, & 0 < x < 2\pi, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

同理,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z) dx dz = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 < y < 2\pi, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z) dx dy = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 < z < 2\pi, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

而

$$\begin{aligned} f_{XY}(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z) dz \\ &= \begin{cases} \int_0^{2\pi} \frac{1}{8\pi^3} (1 - \sin x \sin y \sin z) dz = \frac{1}{4\pi^2}, & 0 < x < 2\pi, 0 < y < 2\pi, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned} f_{YZ}(y, z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z) dx = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 < y < 2\pi, 0 < z < 2\pi, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \\ f_{XZ}(x, z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z) dy = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 < x < 2\pi, 0 < z < 2\pi, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \end{aligned}$$

于是, 很容易验证

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y), \quad f_{XZ}(x, z) = f_X(x)f_Z(z), \quad f_{YZ}(y, z) = f_Y(y)f_Z(z)$$

而  $f(x, y, z) = f_X(x)f_Y(y)f_Z(z)$ ,

即  $X, Y, Z$  两两独立, 而不是相互独立.

### 3-5 多维随机变量函数的分布

(1) 解 设  $Z = X + Y$ , 则  $Z$  的所有可能取值为  $0, 1, 2, 3, 4$ , 且

$$P\{Y = 0\} = P\{X = 0, Y = 0\} = P\{X = 0\}P\{Y = 0\} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

$$P\{Z = 1\} = P\{X = 0, Y = 1\} + P\{X = 1, Y = 0\}$$

$$= P\{X = 0\}P\{Y = 1\} + P\{X = 1\}P\{Y = 0\} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{11}{24}$$

$$P\{Z = 2\} = P\{X = 1, Y = 1\}$$

$$= P\{X = 1\}P\{Y = 1\} = \frac{3}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{24}$$

$$P\{Z = 3\} = P\{X = 3, Y = 0\}$$

$$= P\{X = 3\}P\{Y = 0\} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{24}$$

$$P\{Z = 4\} = P\{X = 3, Y = 1\}$$

$$= P\{X=3\}P\{Y=1\} = \frac{1}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{24}$$

(2) 解 设  $Z = X + Y$ , 则  $Z$  的所有可能取值为  $2, 3, 4, \dots$ , 且

$$P\{X=k\} = \sum_{i=1}^{k-1} P\{X=i\}P\{X=k-i\} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2^i} \frac{1}{2^{k-i}} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2^k} = \frac{k-1}{2^k}$$

(3) 解 由题意知,  $Z = X + Y$  在  $(0, +\infty)$  上取值, 从而

$$\text{当 } 0 < z \leq 1 \text{ 时, } f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx = \int_0^z e^{x-z} dx = 1 - e^{-z};$$

$$\text{当 } z > 1 \text{ 时, } f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx = \int_0^1 e^{x-z} dx = e^{1-z} - e^{-z};$$

$$\text{综上所述, } f_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-z}, & 0 < z \leq 1, \\ e^{1-z} - e^{-z}, & z > 1, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

(4) 解 ①关于  $X$  的边际概率密度函数为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)} dy = \frac{1}{2}(x+1)e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

关于  $Y$  的边际概率密度函数为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)} dx = \frac{1}{2}(y+1)e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0, \end{cases}$$

显然有,  $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$

故两个随机变量不是相互独立的.

②由题意知,  $Z = X + Y$  在  $(0, +\infty)$  上取值, 从而

$$\text{当 } z > 0 \text{ 时, } f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx = \int_0^z \frac{1}{2} z e^{-z} dx = \frac{1}{2} z^2 e^{-z},$$

$$\text{于是有 } f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} z^2 e^{-z}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

(5) 解 设  $X_i$  表示第  $i$  周的需求量,  $i=1, 2, 3$ .  $Y, Z$  分别表示两周和三周的需求量,

于是由题意知,  $Y = X_1 + X_2$  在  $(0, +\infty)$  上取值, 从而

$$\text{当 } y > 0 \text{ 时, } f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(y-x_1)dx_1 = \int_0^y \frac{1}{2}x_1e^{-x_1}(y-x_1)e^{x_1-y} dx_1 = \frac{1}{6}y^3e^{-y},$$

于是有  $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{6} y^3 e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$

进一步的,  
当  $z > 0$  时,

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1) f_Y(z - x_1) dx_1 = \int_0^z \frac{1}{2} x_1 e^{-x_1} \times \frac{1}{6} (z - x_1)^3 e^{x_1 - z} dx_1 = \frac{1}{120} z^5 e^{-z},$$

从而有  $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{120} z^5 e^{-z}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$

(6) 解 ① 由  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1,$

可得  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} \int_0^1 b e^{-(x+y)} dx dy = b \int_0^1 e^{-x} dx \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = b(1 - e^{-1}) = 1,$

解之, 得  $b = \frac{1}{1 - e^{-1}}.$

$$\textcircled{2} f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \frac{1}{1 - e^{-1}} \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)} dy = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-1}}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \frac{1}{1 - e^{-1}} \int_0^1 e^{-(x+y)} dx = e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

③ 上述两个随机变量的分布函数分别为

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \int_0^x \frac{e^{-t}}{1 - e^{-1}} dt = \frac{1 - e^{-x}}{1 - e^{-1}}, & 0 < x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f_Y(t) dt = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

$U$  的分布函数为

$$F_U(x) = F_X(x) F_Y(x) = \begin{cases} \frac{(1 - e^{-x})^2}{1 - e^{-1}}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

④  $U$  的概率密度函数为

$$f_U(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{2(1-e^{-x})e^{-x}}{1-e^{-1}}, & 0 < x < 1, \\ e^{-x}, & x \geq 1. \end{cases}$$

(7)解 ① 由 题意

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} \lambda\mu e^{-(\lambda x + \mu y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

从而, 当  $y > 0$  时,

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

解之, 得  $b = \frac{1}{1-e^{-1}}$ .

②  $Z$  的取值为 0, 1, 且其取值 0, 1 的概率为

$$P\{Z=0\} = P\{X > Y\} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^x \lambda\mu e^{-(\lambda x + \mu y)} dy = \frac{\mu}{\lambda + \mu},$$

$$P\{Z=1\} = 1 - P\{Z=0\} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

于是其分布函数为  $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \frac{\mu}{\lambda + \mu}, & 0 \leq z < 1, \\ 1, & z \geq 1. \end{cases}$

(8) 证明  $P\{Z=i\} = \sum_{k=0}^i P\{X=k, Y=i-k\}$

$$= \sum_{k=0}^i P\{X=k\}P\{Y=i-k\} \quad (\text{独立性})$$

$$= \sum_{k=0}^i p(k)q(i-k)$$

(9) 证明  $P\{Z=i\} = \sum_{k=0}^i p(k)q(i-k)$

$$= \sum_{k=0}^i C_{n_1}^k p^k (1-p)^{n_1-k} C_{n_2}^{i-k} p^{i-k} (1-p)^{n_2-i+k}$$

$$= \sum_{k=0}^i C_{n_1+n_2}^i p^i (1-p)^{n_1+n_2-i}$$

即  $Z = X + Y \sim B(n_1 + n_2, p)$

(10) ① 证明  $X$  的概率密度函数为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty,$$

$Y$  的概率密度函数为

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}, -\infty < y < +\infty,$$

于是,  $X$  和  $Y$  的联合概率密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}.$$

从而当  $z > 0$  时,

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z \leq z\} = P\{\sqrt{X^2 + Y^2} \leq z\} &&= \int_0^{2\pi} \int_0^z \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr d\theta \\ &= P\{X^2 + Y^2 \leq z^2\} &&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq z^2} f(x, y) dx dy &&= 1 - e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq z^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dx dy \end{aligned}$$

于是  $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$  的分布函数为

$$F_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

从而  $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$  的概率密度函数为

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

②  $Z = \max\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$  的分布函数为

$$F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)F_{X_3}(z)F_{X_4}(z)F_{X_5}(z)$$

$$= \begin{cases} (1 - e^{-\frac{z^2}{8}})^5, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

从而  $P\{Z > 4\} = 1 - F_Z(4) = 1 - (1 - e^{-2})^5$

(11) 解 ①  $P\{X = 2 | Y = 2\} = \frac{P\{X = 2, Y = 2\}}{P\{Y = 2\}} = \frac{0.05}{0.25} = 0.2,$

$$P\{Y = 3 | X = 0\} = \frac{P\{X = 0, Y = 3\}}{P\{X = 0\}} = \frac{0.01}{0.03} = \frac{1}{3};$$

②  $U = \max\{X, Y\}$  的所有可能取值为 1, 2, 3, 4, 5, 且

$$\begin{aligned} P\{U = 1\} &= P\{X = 0, Y = 1\} + P\{X = 1, Y = 0\} + P\{X = 1, Y = 1\} \\ &= 0.01 + 0.01 + 0.02 = 0.04, \end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned} P\{U = 2\} &= P\{X = 0, Y = 2\} + P\{X = 1, Y = 2\} + P\{X = 2, Y = 2\} \\ &\quad + P\{X = 2, Y = 0\} + P\{X = 2, Y = 1\} = 0.16, \end{aligned}$$

$$P\{U = 3\} = 0.28, \quad P\{U = 4\} = 0.24, \quad P\{U = 5\} = 0.28.$$

③  $V = \min\{X, Y\}$  的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 且

$$\begin{aligned} P\{V = 0\} &= P\{X = 0, Y = 1\} + P\{X = 0, Y = 2\} + P\{X = 0, Y = 3\} \\ &\quad + P\{X = 1, Y = 0\} + P\{X = 2, Y = 0\} + P\{X = 3, Y = 0\} + P\{X = 4, Y = 0\} + P\{X = 5, Y = 0\} \\ &= 0.28, \end{aligned}$$

同理可得

$$P\{V = 1\} = 0.3, \quad P\{V = 2\} = 0.25, \quad P\{V = 3\} = 0.17.$$

④

W	1	2	3	4	5	6	7	8
P	0.02	0.06	0.13	0.19	0.24	0.19	0.12	0.05

## 第四章 随机变量的数字特征

### 习题 4-1 数学期望

1. 设随机变量  $X$  的分布律为:  $P\{X = k\} = \frac{1}{5}, k = 1, 2, 3, 4, 5$ , 求  $E(X), E(X^2)$ ,

$E(X+2)^2$ .

解:  $E(X) = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{1}{5} + 5 \times \frac{1}{5} = 3$ ;

$E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{5} + 2^2 \times \frac{1}{5} + 3^2 \times \frac{1}{5} + 4^2 \times \frac{1}{5} + 5^2 \times \frac{1}{5} = 11$ ;

$E(X+2)^2 = (1+2)^2 \times \frac{1}{5} + (2+2)^2 \times \frac{1}{5} + (3+2)^2 \times \frac{1}{5} + (4+2)^2 \times \frac{1}{5} + (5+2)^2 \times \frac{1}{5} = 27$ .

2. 设随机变量  $X$  的分布律为:  $P\{X = (-1)^k \frac{2^k}{k}\} = \frac{1}{2^k}, k = 1, 2, \dots$ , 问随机变量

$X$  的数学期望是否存在?

解: 由于级数  $\sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{2^k}{k} \right| \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  发散, 故由期望的定义知道, 随机变量  $X$

的数学期望不存在.

3. 把数字  $1, 2, \dots, n$  任意的排成一排, 如果数字  $k$  恰好出现在第  $k$  个位置上, 则称有一个匹配, 求匹配数的数学期望.

解: 令  $X_i = \begin{cases} 1 & \text{数 } i \text{ 在第 } i \text{ 个位置} \\ 0 & \text{数 } i \text{ 不在第 } i \text{ 个位置} \end{cases}$ , 则匹配数  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . 由题意知,

$P(X_i = 1) = \frac{1}{n}, P(X_i = 0) = \frac{n-1}{n}, i = 1, 2, \dots, n$ , 故由期望的性质得

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) = 1.$$

4 解: (1)  $X$  的分布律为  $P(X=1) = 0.2, P(X=2) = 0.2, P(X=3) = 0.4, P(X=4) = 0.2$ .

$P(X=2) = 0.2 + 0 + 0.1 = 0.2, P(X=3) = 0.0 + 0.3 + 0.1 = 0.4$ ,

故  $E(X) = 1 \times 0.4 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.4 = 2$ . 同理  $Y$  的分布律为  $P(Y=-1) = 0.3$ ,

$P(Y=0) = 0.4, P(Y=1) = 0.3$ , 故  $E(Y) = -1 \times 0.3 + 0 \times 0.4 + 1 \times 0.3 = 0$ .

(3) 由定理知道

$E(Z) =$

$$\frac{-1}{1} \times 0.2 + \frac{-1}{2} \times 0.1 + \frac{-1}{3} \times 0 + \frac{0}{1} \times 0.1 + \frac{0}{2} \times 0 + \frac{0}{3} \times 0.3 + \frac{1}{1} \times 0.1 + \frac{1}{2} \times 0.1 + \frac{1}{3} \times 0.1 = -\frac{4}{15}$$

注: 本题也可以先求出  $Z$  的分布律然后求其期望.

(3) 由定理知道

$$E(W) = (-1-1)^2 \times 0.2 + (-1-2)^2 \times 0.1 + (-1-3)^2 \times 0 + (0-1)^2 \times 0.1 + (0-2)^2 \times 0 + (0-3)^2 \times 0.3 + (1-1)^2 \times 0.1 + (1-2)^2 \times 0.1 + (1-3)^2 \times 0.1 = 5$$

5. 一工厂生产的某种设备的寿命  $X$  (以年计) 服从指数分布, 概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 4e^{-4x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

工厂规定, 出售的设备若在售出一年之内损坏可予以调换. 若工厂售出一台设备盈利 100 元, 调换一台设备厂方需花费 300 元, 试求厂方出售一台设备的净盈利的数学期望.

解: 设  $Y$  为厂方出售一台设备的净盈利, 则由题意知  $Y = \begin{cases} -200 & X < 1 \\ 100 & X \geq 1 \end{cases}$ . 又  $X$  服

从指数分布, 故  $P(X < 1) = \int_0^1 4e^{-4x} dx = -e^{-4x} \Big|_0^1 = 1 - e^{-4}$ ,  $P(X \geq 1) = e^{-4}$ , 即  $Y$  的分布律为

$P(Y = -200) = 1 - e^{-4}$ ,  $P(Y = 100) = e^{-4}$ , 所以厂方出售一台设备的净盈利的数学期望

$$E(Y) = -200 \times (1 - e^{-4}) + 100 \times e^{-4} = 300e^{-4} - 200 \text{ 元}.$$

6. 设随机变量  $X, Y$  的概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} 4e^{-4y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

(1) 求  $E(X+Y), E(2X-3Y^2)$ ;

(2) 若  $X, Y$  相互独立, 求  $E(XY)$ .

解: (1)  $X, Y$  均为指数分布, 则  $E(X) = \frac{1}{2}$ ,  $E(Y) = \frac{1}{4}$ , 故

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{3}{4},$$

$$E(2X-3Y^2) = 2E(X) - 3E(Y^2) = 1 - 3 \int_0^{\infty} y^2 4e^{-4y} dy = 1 - 3 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{8}.$$

(2) 若  $X, Y$  相互独立, 则  $E(XY) = E(X)E(Y) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ .

7. 用天平称某种物品的重量 (砝码仅允许放在一个秤盘中), 物品的重量以相同的概率为 1 克, 2 克, ..., 10 克, 现在三组砝码为: (甲组) 1, 2, 2, 5, 10 (克); (乙组) 1, 2, 3, 4, 10 (克); (丙组) 1, 1, 2, 5, 10 (克), 问用哪一组砝码称重时所用的平均砝码数最少?

解: 设  $X$  为物品的重量, 则由题意知  $P(X=i) = \frac{1}{10}, i=1, 2, \dots, 10$ . 故使用甲组砝码称重时所用的平均砝码数为  $\frac{1}{10} \times (1+1+2+2+1+2+2+3+3+1) = 1.8$ , 使用乙组砝码称重时所用的平均砝码数为  $\frac{1}{10} \times (1+1+1+1+2+2+2+3+3+1) = 1.7$ , 使用丙组砝码称重时所用的平均砝码数为  $\frac{1}{10} \times (1+1+2+4+1+2+2+3+4+1) = 2.1$ , 所以使用乙组砝码称重时所用的平均砝码数最少.

### 习题 4-2 方差

1. 求出习题 4-1 第 (1) 题中随机变量  $X$  的方差  $D(X)$  以及  $D(X+2)$ .

解: 由习题 4-1 第 (1) 得  $E(X) = 3$ , 故  $D(X) = E(X-3)^2 = \frac{1}{5} \times \sum_{i=1}^5 (i-3)^2 = 2$ ,

$$D(X+2) = D(X) = 2.$$

2. 设随机变量  $X$  服从  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  上的均匀分布, 求  $Y = \sin X$  的数学期望与方差.

解: 随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$  故

$$E(Y) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin x dx = 0,$$

$$D(Y) = E(Y - E(Y))^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin^2 x dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1 - \sin 1}{2}.$$

3. 设随机变量  $X$  服从瑞利分布, 其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

其中,  $\sigma > 0$  是常数, 求  $E(X), D(X)$ .

解:  $E(X) = \int_0^{\infty} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = -e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \Big|_0^{\infty} = 1$ ,

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1, \text{ 故 } D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 0.$$

4. 设随机变量  $X$  服从几何分布, 其分布律为

$$P\{X = k\} = p(1-p)^{k-1}, k = 1, 2, \dots$$

其中,  $0 < p < 1$  是常数, 求  $E(X), D(X)$ .

$$\text{解: } E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = -p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(1-p)^k}{dp} = -p \frac{d(\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k)}{dp} = \frac{1}{p}, \text{ 令 } 1-p = q,$$

则  $E(X^2) = p \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} = p[1 + 2^2 q + 3^2 q^2 + \dots + k^2 q^{k-1} + \dots]$ , 显然

$$S = [1 + 2^2 q + 3^2 q^2 + \dots + k^2 q^{k-1} + \dots] = \frac{d[q + 2q^2 + 3q^3 + \dots + kq^k + \dots]}{dq}.$$

由  $E(X)$  的计算过程可知  $q + 2q^2 + 3q^3 + \dots + kq^k + \dots = \frac{q}{(1-q)^2}$ , 故

$$S = \frac{d}{dq} \left[ \frac{q}{(1-q)^2} \right] = \frac{1+q}{(1-q)^3} = \frac{2-p}{p^3},$$

即  $E(X^2) = p \times S = \frac{2-p}{p^2}$ , 所以  $D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1-p}{p^2}$ .

5. 设  $X \sim U(0, \frac{1}{2})$ , 求: (1)  $\frac{D(X)}{[E(X)]^2}$ ; (2)  $E[Xe^X]$ .

解: 随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$  则

$$E(X) = \frac{1}{4}, \quad D(X) = \frac{1}{48},$$

$$(1) \frac{D(X)}{[E(X)]^2} = \frac{1}{48} / \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{3};$$

$$(2) E[Xe^X] = \int_0^{\frac{1}{2}} xe^x \times 2 dx = 2 - e^{\frac{1}{2}}.$$

6. 设随机变量  $X$  具有概率密度函数:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

已知  $E(X) = \frac{1}{2}$ ,  $D(X) = \frac{3}{20}$ , 求  $a, b, c$  的值.

解: 由  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 (ax^2 + bx + c)dx = 1$  得  $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 1$ ;

由  $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x(ax^2 + bx + c)dx = \frac{1}{2}$  得  $\frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} = \frac{1}{2}$ ;

由  $D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \frac{1}{2})^2 f(x)dx = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 (ax^2 + bx + c)dx = \frac{3}{20}$  得  $\frac{a}{5} + \frac{b}{4} + \frac{c}{3} = \frac{2}{5}$ .

联立上面三个式子解得  $a=12, b=-12, c=3$ .

7. 设随机变量  $X, Y$  相互独立, 都服从  $N(0, \frac{1}{2})$ , 求  $E(|X - Y|)$  和  $D(|X - Y|)$ .

解: 因为随机变量  $X, Y$  相互独立, 都服从  $N(0, \frac{1}{2})$ , 故  $X - Y \sim N(0, 1)$ , 故

$$E(|X - Y|) = \int_{-\infty}^{\infty} |z| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} ze^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{-2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_0^{\infty} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}},$$

$$E(|X - Y|^2) = \int_{-\infty}^{\infty} |z|^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1, \text{ 故}$$

$$D(|X - Y|) = E(|X - Y|^2) - E(|X - Y|)^2 = 1 - \frac{2}{\pi}.$$

8. 设随机变量  $X, Y$  相互独立, 方差  $D(X), D(Y)$  都存在, 试证明:

$$D(XY) = D(X) \cdot D(Y) + [E(X)]^2 D(Y) + [E(Y)]^2 D(X),$$

并由此说明  $D(XY) \geq D(X) \cdot D(Y)$ .

解: 因为随机变量  $X, Y$  相互独立, 故随机变量  $X^2, Y^2$  也相互独立. 故

$$\begin{aligned} D(XY) &= E[(XY)^2] - E(XY)^2 = E(X^2)E(Y^2) - E(X)^2 E(Y)^2 \\ &= [D(X) + E(X)^2] \times [D(Y) + E(Y)^2] - E(X)^2 E(Y)^2 \\ &= D(X) \cdot D(Y) + [E(X)]^2 D(Y) + [E(Y)]^2 D(X) \end{aligned}$$

由于  $D(X) \geq 0, D(Y) \geq 0$ , 故此时必有  $D(XY) \geq D(X) \cdot D(Y)$ .

9. 某办公室有 3 台电脑, 被使用的概率分别为 0.3, 0.6, 0.8, 且是否使用相互独立, 用  $X$  表示同时使用的台数, 求  $E(X), D(X)$ .

解: 显然  $X$  可能的取值为 0, 1, 2, 3. 设事件  $A_i = \{\text{第 } i \text{ 台电脑被使用}\}, i = 1, 2, 3,$

由题意知  $P(A_1) = 0.3, P(A_2) = 0.6, P(A_3) = 0.8$ , 故由三台电脑是否使用相互独立得

$$P(X=0) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = 0.7 \times 0.4 \times 0.2 = 0.056,$$

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) \\ &= 0.3 \times 0.4 \times 0.2 + 0.7 \times 0.6 \times 0.2 + 0.7 \times 0.4 \times 0.8 = 0.332 \end{aligned}$$

$$P(X=2) = P(A_1 A_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 A_2 A_3 \cup A_1 \bar{A}_2 A_3) = 0.3 \times 0.6 \times 0.2 + 0.7 \times 0.6 \times 0.8 + 0.3 \times 0.4 \times 0.8 = 0.468$$

$$P(X=3) = P(A_1 A_2 A_3) = 0.3 \times 0.6 \times 0.8 = 0.144,$$

所以

$$E(X) = 0 \times 0.056 + 1 \times 0.332 + 2 \times 0.468 + 3 \times 0.144 = 1.7,$$

$$E(X^2) = 0^2 \times 0.056 + 1^2 \times 0.332 + 2^2 \times 0.468 + 3^2 \times 0.144 = 3.5,$$

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3.5 - 1.7^2 = 0.61.$$

#### 习题 4-3 协方差及相关系数

1. 解: 易知  $E(X) = -1 \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{2}{8} + 1 \times \frac{3}{8} = 0$ , 此外  $XY$  的分布律为:

$$P(XY = -1) = P\{X = -1, Y = 1\} + P\{X = 1, Y = -1\} = \frac{2}{8}, \quad P(XY = 0) = \frac{4}{8},$$

$$P\{XY = 1\} = \frac{2}{8}$$

故  $E(XY) = -1 \times \frac{2}{8} + 0 \times \frac{4}{8} + 1 \times \frac{2}{8} = 0$ , 所以  $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$ , 即  $X$

和  $Y$  是不相关的. 但  $P\{X = -1\} = \frac{3}{8}, P\{Y = -1\} = \frac{3}{8}$ , 而  $P\{X = -1, Y = -1\} = \frac{1}{8}$ , 从而

而

$P\{X = -1, Y = -1\} \neq P\{X = -1\}P\{Y = -1\}$ , 故  $X$  和  $Y$  不是相互独立的.

2. 设二维随机变量  $(X, Y)$  具有概率密度函数

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & |y| < x, 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

求  $E(X), D(X), Cov(X, Y)$ .

解:  $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dy dx = \int_0^1 x \left[ \int_{-x}^x 1 dy \right] dx = \frac{2}{3},$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, y) dy dx = \int_0^1 x^2 \left[ \int_{-x}^x 1 dy \right] dx = \frac{1}{2},$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left[ \int_{-x}^x y dy \right] dx = 0,$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y) dy dx = \int_0^1 x \left[ \int_{-x}^x y dy \right] dx = 0,$$

故  $D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{18}$ ,  $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$ .

3 设随机变量  $(X, Y)$  具有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+y), & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

求  $E(X), E(Y), Cov(X, Y), \rho_{XY}, D(X+Y)$ .

$$\text{解: } E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dy dx = \int_0^2 x \left[ \int_0^2 \frac{1}{8}(x+y) dy \right] dx = \frac{7}{6},$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dx dy = \int_0^2 \left[ \int_0^2 y \times \frac{1}{8}(x+y) dx \right] dy = \frac{7}{6},$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, y) dy dx = \int_0^2 x^2 \left[ \int_0^2 \frac{1}{8}(x+y) dy \right] dx = \frac{5}{3},$$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(x, y) dx dy = \int_0^2 \left[ \int_0^2 \frac{1}{8} y^2 (x+y) dy \right] dx = \frac{5}{3},$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y) dy dx = \int_0^2 x \left[ \int_0^2 \frac{1}{8} y(x+y) dy \right] dx = \frac{4}{3},$$

故

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{11}{36},$$

$$D(Y) = \frac{11}{36}, \quad Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{1}{36},$$

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2Cov(X, Y) = \frac{5}{9}, \quad \rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = -\frac{1}{11}.$$

4. 设  $X \sim N(\mu, \sigma^2), Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 且设  $X$  与  $Y$  相互独立, 试求  $Z_1 = \alpha X + \beta Y$

与  $Z_2 = \alpha X - \beta Y$  的相关系数 (其中,  $\alpha, \beta$  是不为零的常数).

解: 由题意知

$$E(Z_1) = \alpha E(X) + \beta E(Y) = (\alpha + \beta)\mu, \quad E(Z_2) = (\alpha - \beta)\mu,$$

$$D(Z_1) = \alpha^2 D(X) + \beta^2 D(Y) = (\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2 = D(Z_2),$$

$$\begin{aligned} E(Z_1 Z_2) &= \alpha^2 E(X^2) - \beta^2 E(Y^2) = \alpha^2 [D(X) + E(X)^2] - \beta^2 [D(Y) + E(Y)^2] \\ &= (\alpha^2 - \beta^2)(\mu^2 + \sigma^2), \end{aligned}$$

$$\text{故 } \rho_{Z_1 Z_2} = \frac{\text{Cov}(Z_1, Z_2)}{\sqrt{D(Z_1)}\sqrt{D(Z_2)}} = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)(\mu^2 + \sigma^2) - (\alpha^2 - \beta^2)\mu^2}{(\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

5. 已知正常男性成人血液中, 每毫升白细胞数平均值为 7300, 均方差为 700, 利用切比雪夫不等式估计每毫升血液中含白细胞数在 5200 ~ 9400 之间的概率.

解: 记正常男性成人血液中每毫升白细胞数为  $Y$ , 由题意知  $E(Y) = 7300, Y \in \mathbb{R}$ , 则

$$\begin{aligned} P\{5200 \leq Y \leq 9400\} &= P\{5200 - 7300 \leq Y - E(Y) \leq 9400 - 7300\} \\ &= P\{|Y - E(Y)| \leq 2100\} \geq 1 - \frac{700}{2100^2} = 0.9998. \end{aligned}$$

6. 已知  $(X, Y) \sim N(0, 0, 1, 4, \frac{1}{2})$ , 设  $Z = aX + Y$ , 且  $Z$  与  $Y$  不相关, 求  $a$  的值.

解: 由题意知,  $E(X) = E(Y) = 0, D(X) = 1, D(Y) = 4, \rho_{XY} = \frac{1}{2}$ , 且  $\text{Cov}(Z, Y) = 0$ .

由于  $Z = aX + Y$ , 则  $E(Z) = aE(X) + E(Y) = 0$ , 故  $E(ZY) = 0$ . 又

$$E(ZY) = E(aXY + Y^2) = aE(XY) + D(Y) + E(Y)^2 = aE(XY) + 4, \text{ 而}$$

$$E(XY) = E(X)E(Y) + \sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}\rho_{XY} = 1, \text{ 故由 } aE(XY) + 4 = 0 \text{ 解得 } a = -4.$$

7. 已知随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立,  $D(X) = 4D(Y)$ , 求  $2X + 3Y$  与  $2X - 3Y$  的相关系数.

$$\begin{aligned} \text{解: } & E[(2X + 3Y)(2X - 3Y)] - E(2X + 3Y)E(2X - 3Y) \\ &= 4E(X^2) - 9E(Y^2) - 4E(X)^2 + 9E(Y)^2 = 4D(X) - 9D(Y), \end{aligned}$$

$$D(2X + 3Y) = D(2X - 3Y) = 4D(X) + 9D(Y)$$

故  $2X + 3Y$  与  $2X - 3Y$  的相关系数

$$\rho = \frac{4D(X) - 9D(Y)}{\sqrt{4D(X) + 9D(Y)}\sqrt{4D(X) + 9D(Y)}} = \frac{7}{25}.$$

8. 设  $X$  与  $Y$  相互独立, 且都服从参数为  $p$  的 0-1 分布,  $0 < p < 1$ , 又设

$$Z = \begin{cases} 0, & \text{若 } X + Y \text{ 为奇数,} \\ 1, & \text{若 } X + Y \text{ 为偶数,} \end{cases}$$

试求: (1)  $Z$  的分布律; (2)  $(X, Z)$  的联合分布律; (3)  $\text{Cov}(X, Z)$ ; (4)  $p$  取什么值时,  $X$  与  $Z$  不相关, 此时,  $X$  与  $Z$  是否相互独立?

解: (1) 由于  $X$  与  $Y$  相互独立, 且都服从参数为  $p$  的 0-1 分布, 故  $Z$  的分布律

为

$$\begin{aligned} P\{Z=0\} &= P\{X=0, Y=1\} + P\{X=1, Y=0\} = P\{X=0\}P\{Y=1\} + P\{X=1\}P\{Y=0\} \\ &= 2p(1-p), \end{aligned}$$

$$P\{Z=1\} = P\{X=0, Y=0\} + P\{X=1, Y=1\} = p^2 + (1-p)^2;$$

(2)  $(X, Z)$  的可能取值为  $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ , 故  $(X, Z)$  的联合分布律为

$$P\{X=0, Z=0\} = P\{X=0, Y=1\} = P\{X=0\}P\{Y=1\} = p(1-p),$$

$$P\{X=0, Z=1\} = P\{X=0, Y=0\} = P\{X=0\}P\{Y=0\} = (1-p)^2,$$

$$P\{X=1, Z=0\} = P\{X=1, Y=0\} = P\{X=1\}P\{Y=0\} = p(1-p),$$

$$P\{X=1, Z=1\} = P\{X=1, Y=1\} = P\{X=1\}P\{Y=1\} = p^2;$$

(3)  $XZ$  的可能取值为  $0, 1$ , 故  $XZ$  的分布律为:

$$P\{XZ=0\} = P\{X=0, Z=1\} + P\{X=0, Z=0\} + P\{X=1, Z=0\} = (1-p)^2 + 2p(1-p),$$

$$P\{XZ=1\} = P\{X=1, Z=1\} = p^2,$$

故  $E(XZ) = p^2$ , 所以  $Cov(X, Z) = E(XZ) - E(X)E(Z) = p^2 - p[p^2 + (1-p)^2]$ ;

(4) 若  $X$  与  $Z$  不相关, 则  $Cov(X, Z) = E(XZ) - E(X)E(Z) = p^2 - p[p^2 + (1-p)^2] = 0$ ,

解得  $p = \frac{1}{2}$ . 此时  $P\{Z=0\} = P\{Z=1\} = \frac{1}{2}$ ,  $P\{X=0\} = P\{X=1\} = \frac{1}{2}$ . 由 (2) 的计算过程, 容易验证此时  $X$  与  $Z$  相互独立.

#### 习题 4-4 随机变量的其他数字特征

1. 设二维随机变量  $(X, Y)$  有概率密度:

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} 6xy^2, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} 2-x-y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

$$(3) f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin(x+y), & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

试分别求出  $(X, Y)$  的协方差矩阵.

$$\text{解: (1) } E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y)dydx = \int_0^1 x^2 [\int_0^1 6y^2 dy] dx = \frac{2}{3},$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, y)dydx = \int_0^1 x^3 [\int_0^1 6y^2 dy] dx = \frac{1}{2},$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y)dx dy = \int_0^1 x [\int_0^1 6y^2 \times y dy] dx = \frac{3}{4},$$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(x, y)dydx = \int_0^1 x [\int_0^1 6y^4 dy] dx = \frac{3}{5},$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y)dydx = \int_0^1 x^2 [\int_0^1 6y^3 dy] dx = \frac{1}{2},$$

$$\text{故 } Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0, \quad D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{18}, \quad D(Y) = \frac{3}{80},$$

所以  $(X, Y)$  的协方差矩阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{18} & 0 \\ 0 & \frac{3}{80} \end{pmatrix}.$$

$$(2) \quad E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y)dydx = \int_0^1 x [\int_0^1 (2-x-y)dy] dx = \frac{5}{12},$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, y)dydx = \int_0^1 x^2 [\int_0^1 (2-x-y)dy] dx = \frac{1}{4},$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y)dx dy = \int_0^1 [\int_0^1 (2-x-y)ydy] dx = \frac{5}{12},$$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(x, y)dydx = \int_0^1 [\int_0^1 y^2 (2-x-y)dy] dx = \frac{1}{4},$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y)dydx = \int_0^1 x [\int_0^1 y(2-x-y)dy] dx = \frac{1}{6},$$

$$\text{故 } Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{1}{144}, \quad D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{11}{144},$$

$D(Y) = \frac{11}{144}$ , 所以  $(X, Y)$  的协方差矩阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{144} & -\frac{1}{144} \\ -\frac{1}{144} & \frac{11}{144} \end{pmatrix}.$$

$$(3) \quad E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y)dydx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x [\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin(x+y)dy] dx = \frac{\pi}{4},$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, y) dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin(x+y) dy \right] dx = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2} - 2,$$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(x, y) dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin(x+y) y^2 dy \right] dx = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2} - 2,$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y) dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} y \sin(x+y) dy \right] dx = \frac{\pi}{2} - 1,$$

$$\text{故 } \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{\pi^2}{16}, \quad D(X) = D(Y) = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2,$$

所以  $(X, Y)$  的协方差矩阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2 & \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{\pi^2}{16} \\ \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{\pi^2}{16} & \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2 \end{pmatrix}.$$

2. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是独立同分布随机变量, 且三阶中心矩等于零, 求

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ 与 } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

的相关系数.

解: 不妨设  $E(X_i) = 0, i = 1, \dots, n$ , 由题意知  $E(X_i^3) = 0, i = 1, \dots, n$  且  $E(\bar{X}) = 0$ .

由独立性知当  $i \neq j$  且  $i \neq k$  时,  $X_i$  与  $X_j X_k$  独立, 故

$$E(X_i X_j X_k) = E(X_i) E(X_j X_k) = 0.$$

故

$$\begin{aligned} E(\bar{X} \hat{\sigma}^2) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} E\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (X_i - \bar{X})^2 X_j\right] \\ &= \frac{1}{n^2} E\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (X_i^2 X_j - 2X_i \bar{X} X_j + \bar{X}^2 X_j)\right], \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E(X_i^2 X_j - 2X_i \bar{X} X_j + \bar{X}^2 X_j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

所以  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  与  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  的相关系数为 0.

注：因为  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是独立同分布随机变量，故其期望均相等。由

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_1)) + E(X_1) = \bar{Y} + E(X_1), \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_1) - \bar{Y})^2, \text{ 知 } \bar{Y}, \hat{\sigma}^2 \text{ 均}$$

为  $Y_i = X_i - E(X_1), i=1, 2, \dots, n$  的函数，且  $Y_1, \dots, Y_n$  独立同分布，

$$E(Y_i) = 0, i=1, 2, \dots, n.$$

考虑到  $\rho_{\bar{X}, \hat{\sigma}^2} = \rho_{\bar{X} + E(X_1), \hat{\sigma}^2}$ ，故可以不妨设  $E(X_i) = 0, i=1, \dots, n$ 。

3. 求出参数为  $\lambda$  的指数分布的随机变量的中位数。

解：参数为  $\lambda$  的指数分布的随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x)$  为：

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

由中位数的定义知  $X$  的中位数  $x_{0.5}$  满足  $F(x_{0.5}) = P\{X \leq x_{0.5}\} = 0.5$ ，即  $e^{-\lambda x_{0.5}} = 0.5$ ，

$$\text{解得 } x_{0.5} = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

## 第五章 多维随机变量及其概率分布

### 一 典型例题

例 5.1 设  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  是相互独立的随机变量序列，如果  $X_n$  服从参数为  $n$  的指数分布 ( $n \geq 1$ )，则下列随机变量中不服从切比雪夫大数定律的是 ( )。

- A  $X_1, \frac{1}{2}X_2, \dots, \frac{1}{n}X_n, \dots$       B  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$   
 C  $X_1, 2X_2, \dots, nX_n, \dots$       D  $X_1, 2^2X_2, \dots, n^2X_n, \dots$

【分析与解答】切比雪夫大数定律要求， $\{X_n, n \geq 1\}$  相互独立且方差一致有界，

即  $D(X_n) \leq C$ 。只需逐一验证这个条件即可。

由题意知， $\{X_n, n \geq 1\}$  相互独立，且  $D(X_n) = \frac{1}{n^2} \leq 1$ ，所以 B 符合大数定律的条件。又  $D(\frac{1}{n}X_n) = \frac{1}{n^2}D(X_n) = \frac{1}{n^4} \leq 1$ ， $D(nX_n) = n^2D(X_n) = 1 \leq 2$ ，故 A, C 符合大数定律条件，然而  $D(n^2X_n) = n^4D(X_n) = n^2$ ，故选项 D 不符合大数定律条件。

例 5.2 设  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  是相互独立, 根据辛钦大数定律, 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

以概率收敛到其数学期望, 只要  $\{X_n, n \geq 1\}$  ( ).

- A 具有相同的数学期望                      B 服从同一离散型分布  
C 服从同一泊松分布                         D 服从同一连续型分布

【分析与解答】辛钦大数定律要求,  $\{X_n, n \geq 1\}$  相互独立同分布且数学期望存在, 而选项 A 没有说明同分布, 选项 BD 没有说明具有数学期望, 只有选项 C, 既是同分布, 数学期望也存在, 因而正确选项是 C. 由题意知,  $\{X_n, n \geq 1\}$  相互

独立, 且  $D(X_n) \neq \frac{1}{n^2} \leq$ , 所以 B 符合大数定律的条件. 又  $D(\frac{1}{n} X_n) = \frac{1}{n^2} D(X_n) = \frac{1}{n^4} \leq 1$ ,  $D(nX_n) = n^2 D(X_n) = 1 \leq 2$ , 故 A, C 符合大数定律条件, 然而  $D(n^2 X_n) = n^4 D(X_n) = n^2$ , 故选项 D 不符合大数定律条件.

例 5.3 设  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  是相互独立, 且都服从  $[-1, 1]$  区间上的均匀分布, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}} \leq 1\right\} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【分析与解答】这是一个利用列维-林德伯格中心极限定理解题的典型问题. 由于  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  是相互独立, 且都服从  $[-1, 1]$  区间上的均匀分布, 所以

$$E(X_n) = 0, \quad D(X_n) = \frac{2^2}{12} = \frac{1}{3},$$

由中心极限定理, 对任意的  $x \in R$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}} \leq x\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\frac{n}{3}}} \leq x\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{\frac{1}{3}}x\right\} = \Phi(x),$$

上式中, 取  $x = \sqrt{3}$ , 即可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}} \leq 1\right\} = \Phi(\sqrt{3})$ .

例 5.4 设  $X_n$  表示一枚硬币随意抛掷  $n$  次“正面”出现的次数, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{2X_n}{\sqrt{n}} \leq x\right\} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【分析与解答】这是一个利用棣莫佛-拉普拉斯中心极限定理解题的典型问题.

由题意知,  $X_n \sim B(n, \frac{1}{2})$ , 故  $E(X_n) = \frac{n}{2}$   $D X_n = \frac{n}{4}$  根据棣莫佛-拉普拉斯中心极限定理有,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{2X_n - n}{\sqrt{n}} \leq x\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{X_n - \frac{1}{2}n}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \leq x\right\} = \Phi(x).$$

## 二 习题答案

### 习题 5-1 大数定律

(1) 解 由于  $D(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i) < +\infty$

根据切比雪夫不等式有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{D(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i)}{\varepsilon^2},$$

进一步的, 我们有

$$1 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{D(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{D(\sum_{i=1}^n X_i)}{n^2 \varepsilon^2}$$

又  $\lim_{n \rightarrow \infty} [1 - \frac{D(\sum_{i=1}^n X_i)}{n^2 \varepsilon^2}] = 1,$

故由夹逼准则知  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)\right| < \varepsilon\right\} = 1.$

即  $\{X_i, i=1,2,3,\dots\}$  满足大数定律.

(2) 解 易知,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i + Y_i) - E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i + Y_i)\right) \right| &= \left| \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)\right) + \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i\right)\right) \right| \\ &\leq \frac{\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \right| + \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i\right) \right|}{2} \end{aligned}$$

对任意的  $\varepsilon > 0$ , 若  $|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i + Y_i) - E(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i + Y_i))| > \varepsilon$ , 则  $|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - E(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i)|$

与  $|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - E(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i)|$  中至少有一个大于  $\varepsilon$ , 即

$$\begin{aligned} & \{|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i + Y_i) - E(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i + Y_i))| > \varepsilon\} \subset \\ & \{|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - E(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i)| > \varepsilon\} \cup \{|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - E(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i)| > \varepsilon\} \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} 0 & \leq P\{|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i + Y_i) - E(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i + Y_i))| > \varepsilon\} \leq \\ & P\{|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - E(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i)| > \varepsilon\} \cup \{|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - E(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i)| > \varepsilon\} \\ & \leq P\{|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - E(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i)| > \varepsilon\} \cup \{|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - E(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i)| > \varepsilon\} \\ & \leq P\{|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - E(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i)| > \varepsilon\} + P\{|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - E(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i)| > \varepsilon\} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

故由夹逼准则知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i + Y_i) - E(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i + Y_i))| > \varepsilon\} = 0.$$

即  $X_n + Y_n$  服从大数定律.

同理可证  $X_n - Y_n$  服从大数定律.

$$(3) \text{ 易知, } |X_n Y_n - XY| = |(X_n - X)(Y_n - Y)| \leq \frac{|X_n - X| + |Y_n - Y|}{2}.$$

对任意的  $\varepsilon > 0$ , 若  $|X_n Y_n - XY| > \varepsilon$ , 则  $|X_n - X|$  与  $|Y_n - Y|$  中至少有一个大于  $\varepsilon$ ,

即

$$\{|X_n Y_n - XY| > \varepsilon\} \subset \{|X_n - X| > \varepsilon\} \cup \{|Y_n - Y| > \varepsilon\}.$$

故

$$0 \leq P\{|X_n Y_n - XY| > \varepsilon\} \leq P\{|X_n - X| > \varepsilon\} + P\{|Y_n - Y| > \varepsilon\} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

从而,

$$P\{|X_n Y_n - XY| > \varepsilon\} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

即

$$X_n Y_n \xrightarrow{P} XY, n \rightarrow \infty$$

(4). 解 由题意,  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  相互独立同分布, 且数学期望为

$$E(X_i) = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

即随机变量序列  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  满足辛钦大数定律条件.

(5) 解 对任给  $\sigma > 0$ , 取  $M > 0$  以及  $N_1$ , 使当  $n > N_1$  时, 有

$$P\{|X| \geq M\} \leq \frac{1}{3}\delta, \quad P\{|X_n - X| \geq M\} \leq \frac{1}{3}\delta,$$

$g(x)$  在  $[-M, M]$  上连续, 从而  $g(x)$  在  $[-M, M]$  上一致连续, 则对任给的  $\varepsilon > 0$ ,

存在  $\varepsilon_1 > 0$ , 使当  $x_1, x_2 \in [-M, M]$ , 且  $|x_1 - x_2| < \varepsilon_1$  时, 有

$$|g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon.$$

再取  $N > N_1$ , 使当  $n > N$  时, 有

$$P\{|X_n - X| \geq \varepsilon_1\} \leq \frac{1}{3}\delta$$

$$\begin{aligned} \{|X| \geq 2M\} \cup \{|X_n| \geq 2M\} &\subset \{|X| \geq M\} \cup \{|X| \leq M, |X_n| \geq 2M\} \\ &\subset \{|X| \geq M\} \cup \{|X_n - X| \geq M\} \end{aligned}$$

从而有

$$\{|X| \leq 2M, |X_n| \leq 2M, |g(X_n) - g(X)| < \varepsilon\} \subset \{|X_n - X| \geq \varepsilon_1\}$$

所以当  $n > N$  时, 有

$$\begin{aligned} &P\{|g(X_n) - g(X)| \geq \varepsilon\} \\ &\leq \{|X| \geq 2M\} \cup \{|X_n| \geq 2M\} + \{|X| \leq 2M\} \cup \{|X_n| \geq 2M, |g(X_n) - g(X)| \geq \varepsilon\} \\ &\leq P\{|X| \geq M\} + P\{|X_n - X| \geq M\} + P\{|X_n - X| \geq \varepsilon_1\} \\ &\leq \frac{1}{3}\delta + \frac{1}{3}\delta + \frac{1}{3}\delta = \delta \end{aligned}$$

即  $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$ .

(6) 解 设  $Y_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 个球的号码与盒子的号码一致,} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 个球的号码与盒子的号码不一致.} \end{cases}, i = 1, 2, \dots, n$

于是  $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$  表示球与盒子号码一致的个数.

由例 4.2.6 知  $E(X_n) = 1, D(X_n) = 1$ .

于是由切比雪夫不等式,

$$0 \leq P\left\{\frac{|X_n - E(X_n)|}{n} \geq \varepsilon\right\} = P\{|X_n - E(X_n)| \geq n\varepsilon\} \leq \frac{D(X_n)}{n\varepsilon^2} = \frac{1}{n^2\varepsilon^2} \rightarrow 0,$$

即  $\frac{X_n - E(X_n)}{n} \xrightarrow{P} 0$ .

### 习题 5-2 中心极限定理

(1) 解 设  $X_i, i = 1, 2, \dots, 1500$  为第  $i$  个加数, 则  $X_1, X_2, \dots, X_{1500}$  独立同分布于

$U(-0.5, 0.5)$ , 从而

$$E(X_i) = 0, D(X_i) = \frac{1}{12}, i = 1, 2, \dots, 1500$$

而  $E\left(\sum_{i=1}^{1500} X_i\right) = 0, D\left(\sum_{i=1}^{1500} X_i\right) = \frac{1500}{12}$ ,

于是根据列维-林德伯格中心极限定理, 有

$$\textcircled{1} \quad P\left\{\left|\sum_{i=1}^{1500} X_i\right| \geq 15\right\} = 1 - P\left\{\left|\sum_{i=1}^{1500} X_i\right| \leq 15\right\} = 1 - P\left\{-15 \leq \sum_{i=1}^{1500} X_i \leq 15\right\}$$

$$= 1 - P\left\{-\frac{15-0}{\sqrt{\frac{1500}{12}}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{1500} X_i - 0}{\sqrt{\frac{1500}{12}}} \leq \frac{15-0}{\sqrt{\frac{1500}{12}}}\right\}$$

$$= 1 - P\left\{-\frac{3}{\sqrt{5}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{1500} X_i - 0}{\sqrt{\frac{1500}{12}}} \leq \frac{3}{\sqrt{5}}\right\} = 1 + \Phi\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}\right) - \Phi\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right) = 2 - 2\Phi\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= 2 - 2\Phi\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right) = 2 - 2\Phi(1.34) = 2 - 2 \times 0.9099 = 0.1802.$$

② 设最多有  $n$  个加数相加才能使得题目要求成立, 则

$$\begin{aligned}
P\{|\sum_{i=1}^n X_i| \geq 10\} &= P\{-10 \leq \sum_{i=1}^n X_i \leq 10\} = P\left\{\frac{-10-0}{\sqrt{D(\sum_{i=1}^n X_i)}} \leq \frac{\sum_{i=1}^n X_i - 0}{\sqrt{D(\sum_{i=1}^n X_i)}} \leq \frac{10-0}{\sqrt{D(\sum_{i=1}^n X_i)}}\right\} \\
&= P\left\{\frac{-10}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \leq \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \leq \frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right\} = \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right) - \Phi\left(-\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right) = 2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right) - 1
\end{aligned}$$

按题意，只需  $2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right) - 1 \geq 0.90$

即  $\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right) \geq 0.95 = \Phi(1.645)$

解之，得  $n \geq 443$ .

(2) 设  $X$  表示出故障的机器数，则  $X \sim B(400, 0.02)$ ,

从而有  $E(X) = 8, D(X) = 7.84$ .

故由棣莫佛-拉普拉斯中心极限定理有

$$\begin{aligned}
P\{|\sum_{i=1}^n X_i| \geq 10\} &= P\{X \geq 10\} = P\left\{\frac{X-8}{\sqrt{7.84}} \geq \frac{10-8}{\sqrt{7.84}}\right\} = P\left\{\frac{X-8}{\sqrt{7.84}} \geq 0.71\right\} \\
&= 1 - P\left\{\frac{X-8}{\sqrt{7.84}} \leq 0.71\right\} = 1 - \Phi(0.71) = 1 - 0.7611 = 0.2389
\end{aligned}$$

(3) 由题意知，当日领取本息的客户数为  $X$ ，则  $X \sim B(500, 0.4)$

于是知，  $E(X) = 200, D(X) = 120$ .

设准备的资金为  $y$  元，则根据棣莫佛-拉普拉斯中心极限定理有

$$P\{X \leq \frac{y}{1000}\} = P\left\{\frac{X-200}{\sqrt{120}} \leq \frac{\frac{y}{1000} - 200}{\sqrt{120}}\right\} \geq 0.9999 = \Phi(3.1)$$

即  $\Phi\left(\frac{y-20000}{1000\sqrt{120}}\right) = \Phi\left(\frac{\frac{y}{1000} - 200}{\sqrt{120}}\right) \geq \Phi(3.1)$

或者 
$$\frac{y-200000}{1000\sqrt{120}} \geq 3.1$$

解上述不等式，可得  $y \geq 233959$

即准备 233959 元就能以 99.99% 的概率满足客户的需求.

(4) 由题意知，使用外线的电话机数为  $X$ ，则  $X \sim B(100, 0.1)$

于是知，  $E(X) = 10, D(X) = 9.$

设安装外线数为  $y$  条，则根据棣莫佛-拉普拉斯中心极限定理有

$$P\{X \leq y\} = P\left\{\frac{X-10}{\sqrt{9}} \leq \frac{y-10}{\sqrt{9}}\right\} = \Phi\left(\frac{y-10}{\sqrt{9}}\right) = \Phi\left(\frac{y-10}{3}\right) \geq 0.95 = \Phi(1.645)$$

即 
$$\frac{y-10}{3} \geq 1.645.$$

解上述不等式，可得  $y \geq 14.935.$

即安装 15 条外线就能以 95% 的概率满足需求.

(5) 由题意知，开房间数为  $X$ ，则  $X \sim B(500, 0.7)$

于是知，  $E(X) = 350, D(X) = 105.$

设提供电量为  $y$  千瓦，则根据棣莫佛-拉普拉斯中心极限定理有

$$\begin{aligned} P\left\{X \leq \frac{y}{2000}\right\} &= P\left\{\frac{X-350}{\sqrt{105}} \leq \frac{\frac{y}{2000}-350}{\sqrt{105}}\right\} = \Phi\left(\frac{\frac{y}{2000}-350}{\sqrt{105}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{y-700000}{2000\sqrt{105}}\right) \geq 0.9999 = \Phi(3.1) \end{aligned}$$

即

或者 
$$\frac{y-700000}{2000\sqrt{105}} \geq 3.1.$$

解上述不等式，可得  $y \geq 763531.$

即提供 763531 千瓦电就能以 99.99% 的概率满足需求.

(6) 设  $X_i$  表示第  $i$  箱的重量，则  $E(X_i) = 50, D(X_i) = 25, i = 1, 2, \dots$

设装箱数为  $y$ ，则根据棣莫佛-拉普拉斯中心极限定理有

$$\begin{aligned}
 P\left\{\sum_{i=1}^n X_i \leq 5000\right\} &= P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}} \leq \frac{5000 - E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}}\right\} = \Phi\left(\frac{5000 - E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}}\right) \\
 &= \Phi\left(\frac{5000 - E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}}\right) \geq 0.977 = \Phi(2)
 \end{aligned}$$

即

$$\frac{5000 - E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}} \geq 2.$$

或者

$$\frac{5000 - 50n}{5\sqrt{n}} \geq 2.$$

解上述不等式，可得  $y \geq 98$ .

即装 99 箱货物能够保证不超载的概率大于 0.977.

(7) 设成功次数为  $X$ ，则  $X \sim B(100, 0.04)$ ，于是由泊松定理  $\lambda = 100 \times 0.04 = 4$ ,

$$P\{X \leq 6\} = \sum_{k=0}^6 P\{X = k\}$$

$$= 0.0183 + 0.0733 + 0.1465 + 0.1954 + 0.1954 + 0.1563 + 0.1042 = 0.8894.$$

由中心极限定理

$$P\{X \leq 6\} = P\left\{\frac{X - 4}{\sqrt{3.84}} \leq \frac{6 - 4}{\sqrt{3.84}}\right\} = \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{3.84}}\right) = \Phi\left(\frac{2}{1.96}\right) = \Phi(1.02) = 0.8461.$$

## 第六章 数理统计的基本思想

### 习题 6-1 总体与样本

- (1) 统计量是样本的参数且不含未知参数. 题目中①, ②, ③, ④尽管都是样本的函数, 但是因为  $\mu$  已知  $\sigma^2$  未知, 所以①, ②, ④是统计量而③不是.
- (2) 补充性质: 若  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i=1, 2, \dots, n$ , 且  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立, 则对任意实数  $c, a_i, i=1, \dots, n$ , 有

$$\sum_{i=1}^n a_i X_i + c \sim N\left(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i + c, \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2\right),$$

即：相互独立的正态分布的线性组合仍是正态分布.

这个性质在考研中经常用到!

记  $\bar{X} = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{36} X_i$  为样本均值，则由补充性质知  $\bar{X} \sim N\left(52, \frac{6.3^2}{36}\right)$ . 从而所求

$$\begin{aligned} P\{50.8 \leq \bar{X} \leq 53.8\} &= P\left\{\frac{50.8-52}{6.3/6} \leq \frac{\bar{X}-52}{6.3/6} \leq \frac{53.8-52}{6.3/6}\right\} \\ &= P\left\{\frac{50.8-52}{6.3/6} \leq \frac{\bar{X}-52}{6.3/6} \leq \frac{53.8-52}{6.3/6}\right\} \\ &= P\left\{-1.14 \leq \frac{\bar{X}-52}{6.3/6} \leq 1.71\right\} \\ &= \Phi(1.71) + \Phi(1.14) - 1 \\ &= 0.8293. \end{aligned}$$

上式中第二个等号是让正态分布转化为标准正态分布，进而查表求值.

(3) 因为  $X \sim U(0, \theta)$ ，所以  $X$  的分布函数，概率密度函数分别为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x/\theta, & 0 < x < \theta, \\ 1, & x \geq \theta, \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 1/\theta, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

所以  $X_{(1)}$  的概率密度函数为

$$f_{X_{(1)}}(x) = n(1-F(x))^{n-1} f(x) = \begin{cases} \frac{n}{\theta} (1-x/\theta)^{n-1}, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

$X_{(n)}$  的概率密度函数为

$$f_{X_{(n)}}(x) = nF^{n-1}(x) f(x) = \begin{cases} \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

(4) 因为  $X \sim P(\lambda)$ ，所以  $E(X) = \lambda, D(X) = \lambda$ . 从而

$$\begin{aligned} E(T_1) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \times n \times \lambda = \lambda, \\ D(T_1) &= D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) = \frac{1}{n^2} \times n \times \lambda = \frac{\lambda}{n}; \end{aligned}$$

$$E(T_2) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} E(X_i) + \frac{1}{n} E(X_n) = \frac{1}{n-1} \times (n-1)\lambda + \frac{1}{n} \lambda = \frac{n+1}{n} \lambda,$$

$$D(T_2) = \frac{1}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n-1} D(X_i) + \frac{1}{n^2} D(X_n) = \frac{1}{(n-1)^2} \times (n-1)\lambda + \frac{1}{n^2} \lambda = \frac{n^2 + n - 1}{n^2(n-1)} \lambda.$$

综上所述可得  $E(T_1) < E(T_2), D(T_1) < D(T_2)$ .

### 习题 6-2 数理统计的三大分布

(1) 因为  $X_i \sim N(1, \sigma^2), i=1, 2, 3, 4$ , 且相互独立, 所以

$$X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2), \quad X_3 + X_4 - 2 \sim N(0, 2\sigma^2),$$

标准化变量  $\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0, 1), \quad \frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0, 1).$

所以  $\left( \frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(1).$

从而  $T = \frac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 - 2|} = \frac{\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left( \frac{X_3 + X_4 - 2}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2}} = \frac{N(0, 1)}{\sqrt{\chi^2(1)/1}} \sim t(1).$

注: 一定要将变量转化为标准正态分布后, 再看能否转化为三大分布的标准形式.

(2) 由于  $X \sim t(n)$ , 因此  $X^2 \sim F(1, n)$ . 又  $Y \sim F(1, n)$ , 所以  $Y$  与  $X^2$  同分布. 所求

$$P\{Y > c^2\} = P\{X^2 > c^2\} = P\{X > c\} + P\{X < -c\} = 2P\{X > c\} = 2a.$$

上式倒数第二个等号是由  $t$  分布的对称性得到.

(3) 由于  $P\{t > t_\alpha(n)\} = \alpha$ , 以及  $t$  分布的对称性知  $P\{t < -t_\alpha(n)\} = \alpha$ , 从而

$$P\{t > -t_\alpha(n)\} = 1 - P\{t < -t_\alpha(n)\} = 1 - \alpha.$$

根据上分位点的定义可知  $t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$ .

(4) 补充  $\Gamma$  函数,  $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha > 0$  的性质:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha), \quad \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

特别地,  $\Gamma(n+1) = n!$ .

由于自由度为  $n$  的  $\chi^2$  分布  $X$  的密度函数为:  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$

因此 
$$E(\chi^2) = E(X) = \int_0^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} dx = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{+\infty} x^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$= \frac{2^{\frac{n}{2}+1}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{+\infty} t^{\frac{n}{2}} e^{-t} dt = \frac{2\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(\frac{n}{2})} = 2 \times \frac{n}{2} = n.$$

又 
$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{n}{2}+1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} dx = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{+\infty} x^{\frac{n}{2}+1} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$= \frac{2^{\frac{n}{2}+2}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{+\infty} t^{\frac{n}{2}+1} e^{-t} dt = \frac{4\Gamma(\frac{n}{2}+2)}{\Gamma(\frac{n}{2})} = 4 \times (\frac{n}{2}+1) \times \frac{n}{2} = n^2 + 2n,$$

所以  $D(\chi^2) = E(X^2) - (E(X))^2 = n^2 + 2n - n^2 = 2n.$

(5)  $t$  分布的概率密度函数为  $h(t) = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{\pi n} \Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, t \in R.$

当  $n > 1$  时,  $E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{\pi n} \Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dt = 0.$  这是由于被积函数是奇函数

且积分区间关于  $y$  轴对称.

当  $n > 2$  时, 
$$D(t) = E(t^2) = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{\pi n} \Gamma(n/2)} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dt$$

$$= \frac{2\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{\pi n} \Gamma(n/2)} \int_0^{+\infty} t^2 \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dt = \frac{n\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{\pi} \Gamma(n/2)} \int_0^{+\infty} x^{1/2} (1+x)^{-\frac{n+1}{2}} dx$$

$$= \frac{n\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n}{2})} \times \frac{\Gamma[\frac{3}{2}]\Gamma[\frac{n}{2}-1]}{\Gamma[(n+1)/2]} = \frac{n}{n-2}.$$

注: 该题只需要了解即可.

(6) 设  $F \sim F(n_1, n_2)$ , 则由上分位点的定义知  $P\{F > F_{1-\alpha}(n_1, n_2)\} = 1 - \alpha.$

因此  $P\left\{\frac{1}{F} < \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1, n_2)}\right\} = 1 - \alpha$ , 所以  $P\left\{\frac{1}{F} > \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1, n_2)}\right\} = \alpha$ .

又  $\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$ , 所以  $\frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1, n_2)} = F_{\alpha}(n_2, n_1)$ .

### 习题 6-3 正态总体的抽样分布定理

(1) 对选项 A,  $n\bar{X} \sim N(0, n)$ . 这是因为  $E(n\bar{X}) = 0, D(n\bar{X}) = n$ . 显然, 由推论 6.3.1

知  $\sqrt{n}\bar{X} \sim N(0, 1)$ .

对选项 B, 由定理 6.3.3 知  $\frac{(n-1)}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2(n-1)$ , 所以  $(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1)$ .

对选项 C, 由定理 6.3.4 知  $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ , 所以  $\frac{\sqrt{n}\bar{X}}{S} \sim t(n-1)$ .

对选项 D, 因为  $X_1^2 \sim \chi^2(1), \sum_{i=2}^n X_i^2 \sim \chi^2(n-1)$ , 所以由  $F$ -分布的定义知

$$\frac{X_1^2/1}{\sum_{i=2}^n X_i^2/(n-1)} \sim F(1, n-1).$$

综上, 答案为 D.

(2) 由题知  $\frac{X_i}{0.3} \sim N(0, 1)$ , 所以  $\sum_{i=1}^{10} \frac{X_i^2}{0.3^2} \sim \chi^2(10)$ . 因此查表得

$$P\left\{\sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 1.44\right\} = P\left\{\frac{1}{0.3^2} \sum_{i=1}^{10} X_i^2 > 16\right\} = P\{\chi^2(10) > 16\} = 0.1.$$

(3) 由题知  $\frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 X_i \sim N(0, 1), \frac{Y_i}{3} \sim N(0, 1)$ . 所以  $\frac{Y_i^2}{9} \sim \chi^2(1), \sum_{i=1}^9 \frac{Y_i^2}{9} \sim \chi^2(9)$ , 由  $t$  分布的

定义可得

$$U = \frac{\sum_{i=1}^9 X_i / \sqrt{\sum_{i=1}^9 Y_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^9 \frac{Y_i^2}{9} / 9}} \sim t(9).$$

(4) 因为总体  $X \sim E(\lambda)$ , 所以  $E(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ . 由定理 6.3.1 得

$$E(\bar{X}) = E(X) = \frac{1}{\lambda}, E(S^2) = D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, D(\bar{X}) = \frac{1}{n} D(X) = \frac{1}{n\lambda^2}.$$

(5) 因为总体  $X \sim \chi^2(n)$ , 所以  $E(X) = n, D(X) = 2n$ . 由定理 6.3.1 得

$$E(\bar{X}) = E(X) = n, E(S^2) = D(X) = 2n, D(\bar{X}) = \frac{1}{n}D(X) = 2.$$

(6) 因为  $E(S^2) = D(X)$ , 所以只需求  $D(X)$  即可. 因为总体  $X$  的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} \quad (-\infty < x < +\infty), \text{ 所以 } E(X) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-|x|} dx = 0,$$

$$E(X^2) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-|x|} dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = \Gamma(3) = 2! = 2.$$

所以  $D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2.$

(7) 由定理 6.3.3 知  $\frac{15S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(15)$ . 所以

$$P\left\{\frac{S^2}{\sigma^2} < 2.041\right\} = P\left\{\frac{15S^2}{\sigma^2} < 30.615\right\} = P\{\chi^2(15) < 30.615\} = 1 - P\{\chi^2(15) > 30.615\} = 0.99.$$

又因为  $D\left(\frac{15S^2}{\sigma^2}\right) = 2 \times 15 = 30$ , 且  $D\left(\frac{15S^2}{\sigma^2}\right) = \frac{15^2}{\sigma^4}D(S^2)$ , 所以  $D(S^2) = \frac{2\sigma^4}{15}$ .

(8) 记  $S_1^2, S_2^2$  分别为  $X, Y$  的样本的样本方差, 则

$$E(S_1^2) = D(X) = \sigma^2, E(S_2^2) = D(Y) = \sigma^2.$$

所以

$$\begin{aligned} E(T) &= \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} E\left(\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \bar{Y})^2\right) \\ &= \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} E\left((n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2\right) \\ &= \frac{(n_1 - 1)E(S_1^2) + (n_2 - 1)E(S_2^2)}{n_1 + n_2 - 2} \\ &= \frac{(n_1 - 1)\sigma^2 + (n_2 - 1)\sigma^2}{n_1 + n_2 - 2} = \sigma^2. \end{aligned}$$

## 第七章 参数估计

### 习题 7-1 参数的点估计

(1) 因为总体  $X \sim U(a, b)$ , 所以有

$$\begin{cases} E(X) = \frac{a+b}{2}, \\ E(X^2) = D(X) + E(X)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a = E(X) - \sqrt{3(E(X^2) - E(X)^2)}, \\ b = E(X) + \sqrt{3(E(X^2) - E(X)^2)}. \end{cases}$$

设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为总体  $X$  的一个样本, 用样本矩代替总体矩得

$$\begin{cases} \hat{a} = \bar{X} - \sqrt{\frac{3}{n} \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right)}, \\ \hat{b} = \bar{X} + \sqrt{\frac{3}{n} \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right)}. \end{cases}$$

(2) 令  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为总体  $X$  的一个样本,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为其观测值, 则似然函数为

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \prod_{i=1}^n P\{X_i = x_i\} = (P\{X=1\})^{N_1} (P\{X=2\})^{N_2} (P\{X=3\})^{N_3} \\ &= \theta^{2N_1} (2\theta(1-\theta))^{N_2} (1-\theta)^{2N_3} = 2^{N_2} \theta^{2N_1+N_2} (1-\theta)^{N_2+2N_3}. \end{aligned}$$

对上式取对数导数, 并令导数为 0, 得

$$\frac{d \ln(L(\theta))}{d\theta} = \frac{2N_1 + N_2}{\theta} - \frac{2N_3 + N_2}{1-\theta} = 0.$$

解之得

$$\theta = \frac{2N_1 + N_2}{2N_1 + 2N_2 + 2N_3} = \frac{2N_1 + N_2}{2n}.$$

所以  $\theta$  的极大似然估计量为  $\hat{\theta} = \frac{2N_1 + N_2}{2n}$ .

(3) 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为其观测值, 则似然函数为

$$L(p) = \prod_{i=1}^n P\{X_i = x_i\} = \prod_{i=1}^n (1-p)^{x_i-1} p = (1-p)^{\sum_{i=1}^n x_i - n} p^n.$$

对上式取对数导数, 并令导数为 0, 得

$$\frac{d \ln(L(p))}{dp} = -\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{1-p} + \frac{n}{p} = 0.$$

解之得

$$p = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{\bar{x}}.$$

从而  $p$  的极大似然估计量为  $\hat{p} = \frac{1}{\bar{X}}$ .

(4) 因为总体  $X \sim U(0, \theta)$ , 所以  $E(X) = \frac{\theta}{2}$ .

对估计量  $\theta_1 = 2\bar{X}$ , 因为  $E(\theta_1) = 2E(\bar{X}) = \theta$ , 所以  $\theta_1$  为无偏估计量.

对估计量  $\theta_2 = \max_i \{X_i\}$ , 根据习题 6-1 (3) 题知  $\hat{\theta}_2$  的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

所以  $E(\theta_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta x^n dx = \frac{n}{\theta^n} \times \frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1} \theta$ .

所以  $\theta_2$  不为无偏估计量. 可以修正为  $\frac{n+1}{n} \theta_2$ .

(5) 因为总体服从  $N(\mu, 1)$  分布, 所以

$$E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = \mu, D(X_1) = D(X_2) = D(X_3) = 1.$$

所以

$$E(\mu_1) = \frac{1}{3}E(X_1) + \frac{1}{3}E(X_2) + \frac{1}{3}E(X_3) = \mu;$$

$$E(\mu_2) = \frac{1}{4}E(X_1) + \frac{1}{2}E(X_2) + \frac{1}{4}E(X_3) = \mu;$$

$$E(\mu_3) = \frac{2}{5}E(X_1) + \frac{1}{5}E(X_2) + \frac{2}{5}E(X_3) = \mu.$$

因此这三个估计量都是无偏估计量. 又因为

$$D(\mu_1) = \frac{1}{9}D(X_1) + \frac{1}{9}D(X_2) + \frac{1}{9}D(X_3) = \frac{1}{3}\sigma^2;$$

$$D(\mu_2) = \frac{1}{16}D(X_1) + \frac{1}{4}D(X_2) + \frac{1}{16}D(X_3) = \frac{3}{8}\sigma^2;$$

$$D(\mu_3) = \frac{4}{25}D(X_1) + \frac{1}{25}D(X_2) + \frac{4}{25}D(X_3) = \frac{9}{25}\sigma^2.$$

所以  $\mu_1$  比  $\mu_2$  有效,  $\mu_2$  比  $\mu_3$  有效.

(6) 由题知  $X$  的概率密度函数为  $f(x, \beta) = \begin{cases} \beta x^{-\beta-1}, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1. \end{cases}$

因为  $E(X) = \int_1^{+\infty} \beta x^{-\beta} dx = \frac{\beta}{\beta-1}$ . 所以  $\beta = \frac{E(X)}{E(X)-1}$ .

用样本矩代替总体矩即得  $\beta$  的矩估计量为  $\hat{\beta} = \frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$ .

设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为样本的观测值, 则似然函数为

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \beta) = \begin{cases} \beta^n (x_1 x_2 \cdots x_n)^{-\beta-1}, & x_i > 1 (i=1, 2, \dots, n), \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

当  $x_i > 1, i=1, 2, \dots, n$  时  $L(\beta) > 0$ . 取对数可得

$$\ln L(\beta) = n \ln \beta - (\beta + 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i,$$

两边对  $\beta$  求导并令导数为 0:  $\frac{d \ln L(\beta)}{d\beta} = \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0$ .

解之得  $\beta = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}$ . 从而  $\beta$  的极大似然估计量为  $\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i}$ .

(7) 似然函数为  $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \theta^N (1-\theta)^{n-N}$ . 取对数得

$$\ln L(\theta) = N \ln \theta + (n - N) \ln(1 - \theta).$$

两边对  $\theta$  求导并令导数为 0:  $\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{N}{\theta} - \frac{n - N}{1 - \theta} = 0$ ,

解之得  $\theta = \frac{N}{n}$ . 从而  $\theta$  的极大似然估计量为  $\hat{\theta} = \frac{N}{n}$ .

(8) 由题总体  $X$  的概率密度函数为  $f(x, \lambda) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$  所以有

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, \lambda) dx = \int_0^{+\infty} \lambda^2 x^2 e^{-\lambda x} dx = \lambda^{-1} \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} du = \lambda^{-1} \Gamma(3) = 2\lambda^{-1}.$$

所以  $\lambda = \frac{2}{E(X)}$ . 用样本矩代替总体矩可得  $\lambda$  的矩估计量为  $\hat{\lambda} = \frac{2}{\bar{X}}$ .

设  $x_1, x_2, \dots, x_n, (x_i > 0, i=1, \dots, n)$  为样本的观测值, 则似然函数为

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \lambda) = \lambda^{2n} (x_1 x_2 \cdots x_n) e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i},$$

取对数  $\ln L(\lambda) = 2n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln x_i - \lambda \sum_{i=1}^n x_i$ ,

两边对  $\lambda$  求导并令导数为 0:  $\frac{d \ln L(\lambda)}{d\lambda} = \frac{2n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0$ ,

解之得 
$$\lambda = \frac{2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i} = \frac{2}{\bar{x}},$$

所以  $\lambda$  的极大似然估计量为  $\hat{\lambda} = \frac{2}{\bar{X}}$ .

(9) 因为总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . 所以  $X$  的概率密度函数为

$$f(x, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为样本的观测值, 则似然函数为

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \sigma^2) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma^{-n} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}},$$

取对数得 
$$\ln L(\sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - n \ln \sigma - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2},$$

两边对  $\sigma^2$  求导并令导数为 0: 
$$\frac{d \ln L(\sigma^2)}{d \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{2} = 0,$$

解之得 
$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2,$$

所以  $\sigma^2$  的极大似然估计量为 
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2.$$

下面求  $E(\sigma^2), D(\sigma^2)$ .

因为  $X_1, X_2, \dots, X_n$  独立同分布, 所以

$$E(\sigma^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[(X_i - \mu)^2] = E[(X - \mu)^2] = E[(X - E(X))^2] = D(X) = \sigma^2.$$

$$D(\sigma^2) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D[(X_i - \mu)^2] = \frac{1}{n} D[(X - \mu)^2],$$

因为  $\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$  分布, 所以  $\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$ , 因此

$$D\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right] = \frac{1}{\sigma^4} D[(X-\mu)^2] = 2,$$

所以 
$$D(\sigma^2) = \frac{2\sigma^4}{n}.$$

注:  $D[(X-\mu)^2] = D(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \neq D(X^2) + 4\mu^2 D(X)$ . 参考方差的基本性质.

(10) 由题总体  $X$  的概率密度函数为  $f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$  所以有

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, \theta)dx = \int_0^{+\infty} \frac{\theta^2}{x^2} e^{-\frac{\theta}{x}} dx = \theta \int_0^{+\infty} e^{-u} du = \theta.$$

用样本矩代替总体矩可知  $\theta$  的矩估计量为  $\hat{\theta} = \bar{X}$ .

设  $x_1, x_2, \dots, x_n, (x_i > 0, i = 1, \dots, n)$  为样本的观测值, 则似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \theta^{2n} (x_1 x_2 \cdots x_n)^{-3} e^{-\theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}},$$

取对数得 
$$\ln L(\theta) = 2n \ln \theta - 3 \ln(x_1 x_2 \cdots x_n) - \theta \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i},$$

两边对  $\theta$  求导并令导数为 0: 
$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = 0,$$

解之得 
$$\theta = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}},$$

所以  $\theta$  的极大似然估计量为 
$$\hat{\theta} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}}.$$

(11) ① 总体  $X$  的分布函数为  $F(x, \theta) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$  所以总体的概率密度函数为

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$$

所以

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, \theta)dx = \int_0^{+\infty} \frac{2x^2}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx = \theta^{\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{2}} e^{-u} du = \theta^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi\theta}.$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x, \theta)dx = \int_0^{+\infty} \frac{2x^3}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} dx = \theta \int_0^{+\infty} ue^{-u} du = \theta \Gamma(2) = \theta.$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \theta - \frac{\pi\theta}{4} = \frac{(4-\pi)\theta}{4}.$$

② 设  $x_1, x_2, \dots, x_n, (x_i > 0, i = 1, \dots, n)$  为样本的观测值, 则似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \theta^{-n} 2^n (x_1 x_2 \cdots x_n) e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i^2},$$

取对数得  $\ln L(\theta) = -n \ln \theta + n \ln 2 + \ln(x_1 x_2 \cdots x_n) - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i^2,$

两边对  $\theta$  求导并令导数为 0:  $\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0,$

解之得  $\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2,$

所以  $\theta$  的极大似然估计量为  $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2.$

③ 因为  $X_1, X_2, \dots, X_n$  独立同分布,  $X_1^2, X_2^2, \dots, X_n^2$  也独立同分布并且  $E(X_i^2) = \theta,$

所以由辛钦大数定律可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \theta\right| \geq \varepsilon\right\} = 0,$  对任意的  $\varepsilon > 0.$  从而存在常数

$$a = E(X^2) = \theta.$$

(12) ① 当  $\alpha = 1$  时, 总体  $X$  的分布函数为  $F(x, \beta) = \begin{cases} 1 - x^{-\beta}, & x \geq 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$  从而概率密度函

数为

$$f(x, \beta) = \begin{cases} \beta x^{-\beta-1}, & x \geq 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

因为

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, \beta)dx = \beta \int_1^{+\infty} x^{-\beta} dx = \frac{\beta}{\beta-1}.$$

从而 
$$\beta = \frac{E(X)}{E(X)-1}.$$

用样本矩代替总体矩可得  $\beta$  的矩估计量为  $\hat{\beta} = \frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}.$

设  $x_1, x_2, \dots, x_n, (x_i > 1, i = 1, \dots, n)$  为样本的观测值, 则似然函数为

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \beta) = \beta^n (x_1 x_2 \cdots x_n)^{-\beta-1},$$

取对数得 
$$\ln L(\beta) = n \ln \beta - (\beta + 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i,$$

两边对  $\beta$  求导并令导数为 0: 
$$\frac{d \ln L(\beta)}{d \beta} = \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0,$$

解之得 
$$\beta = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i},$$

所以  $\beta$  的极大似然估计量为 
$$\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i}.$$

②当  $\beta = 2$  时, 总体  $X$  的分布函数为  $F(x, \alpha) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^2, & x \geq \alpha, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$  从而概率密度函数为

$$f(x, \alpha) = \begin{cases} 2\alpha^2 x^{-3}, & x \geq \alpha, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

设  $x_1, x_2, \dots, x_n, (x_i \geq \alpha, i = 1, \dots, n)$  为样本的观测值, 则似然函数为

$$L(\alpha) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \alpha) = 2^n \alpha^{2n} (x_1 x_2 \cdots x_n)^{-3},$$

取对数得 
$$\ln L(\alpha) = n \ln 2 + 2n \ln \alpha - 3 \sum_{i=1}^n \ln x_i,$$

两边对  $\alpha$  求导并令导数为 0: 
$$\frac{d \ln L(\alpha)}{d \alpha} = \frac{2n}{\alpha} > 0,$$

从而  $L(\alpha)$  严格单调递增, 故  $\alpha$  越大,  $L(\alpha)$  越大, 但是  $\alpha$  不能超过观测值的任何

一个值, 即  $\alpha \leq x_i, i=1, \dots, n$ . 要使  $L(\alpha)$  最大, 只能取  $\alpha = \min\{x_i, i=1, \dots, n\}$ .

所以  $\alpha$  的极大似然估计量为  $\hat{\alpha} = \min\{X_i, i=1, \dots, n\}$ .

### 习题 7-2 正态总体参数的区间估计

(1) 由题知  $\bar{x} = 14.91\text{mm}$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ ,  $\sqrt{n} = 3$ .

当  $\sigma = 0.15\text{mm}$  时,  $\mu$  的置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(14.91 - 1.96 \times \frac{0.15}{3}, 14.91 + 1.96 \times \frac{0.15}{3}\right) = (14.81, 15.01).$$

由题知,  $n-1=8$ ,  $t_{0.025}(8) = 2.3060$ ,  $s = 0.1990$ , 当  $\sigma$  未知时,  $\mu$  的置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left(\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = (14.75, 15.07).$$

(2) 由题知  $\bar{x} = 2.125$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.65$ ,  $\sqrt{16} = 4$ .

当  $\sigma = 0.01$  时,  $\mu$  的置信度为 0.90 的置信区间为

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(2.125 - 1.65 \times \frac{0.01}{4}, 2.125 + 1.65 \times \frac{0.01}{4}\right) = (2.121, 2.129).$$

由题知,  $n-1=15$ ,  $t_{0.05}(15) = 1.7531$ ,  $s = 0.017$ , 当  $\sigma$  未知时,  $\mu$  的置信度为 0.90 的置信区间为

$$\left(\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right) = (2.1175, 2.1325).$$

(3) 由题知  $\alpha = 0.05, n_1 = 4, n_2 = 5, n_1 + n_2 - 2 = 7, k = 0.14125, 0$  根据题

目所给数值可得  $s_1^2 = 8.25 \times 10^{-6}$ ,  $s_2^2 = 4.88 \times 10^{-6}$ ,  $s_w^2 = (3 \times s_1^2 + 4 \times s_2^2) / 7$ ,

$s_w = \sqrt{s_w^2} = 0.0025$ . 查表  $t_{0.025}(7) = 2.3646$ . 所求的两总体期望差  $\mu_1 - \mu_2$  的置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) \cdot S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \bar{X} - \bar{Y} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) \cdot S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right) \\ \approx (-0.002, 0.006).$$

(4) 由题知  $n_A = n_B = 10, s_A^2 = 0.541, s_B^2 = 0.6065, \alpha = 0.05$ , 查  $F$  分布表得

$$F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1) = F_{0.025}(9, 9) = 4.03, \quad F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1) = F_{0.975}(9, 9) =$$

$\frac{1}{F_{0.025}(9, 9)} = \frac{1}{4.03}$ , 于是得  $\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}$  的置信度为 0.95 的置信区间为:

$$\left( \frac{s_A^2}{s_B^2} \cdot \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)}, \frac{s_A^2}{s_B^2} \cdot \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)} \right) = (0.2213, 3.5948).$$

(5) 由题知  $P\left\{\frac{(n-1)S^2}{b} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{a}\right\} = P\left\{a < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < b\right\} = 0.95$ . 设  $f(x)$  是  $\chi^2(n-1)$

得概率密度函数, 因为  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ , 所以有  $\int_a^b f(x)dx = 0.95$ . 因此题目

转化为求函数  $F(a, b) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$  在  $\int_a^b f(x)dx = 0.95$  下得条件极值问题. 用拉格朗

日乘数法, 设  $L(a, b; \lambda) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \lambda\left(\int_a^b f(x)dx - 0.95\right)$ , 对  $a, b$  分别求偏导数并

$$\text{令导数为 0 得} \begin{cases} -\frac{1}{a^2} + \lambda f(a) = 0, \\ \frac{1}{b^2} - \lambda f(b) = 0. \end{cases} \quad \text{由之得 } a^2 f(a) = b^2 f(b).$$

(6) 由题知  $\alpha = 0.05$ ,  $n_1 = 4$ ,  $n_2 = 5$ ,  $n_1 + n_2 - 2 = 7$ ,  $\bar{x} = 0.14125$ ,  $\bar{y} = 0.1392$ . 根据题

目所给数值可得  $s_1^2 = 8.25 \times 10^{-6}$ ,  $s_2^2 = 4.88 \times 10^{-6}$ ,  $s_w^2 = (3 \times s_1^2 + 4 \times s_2^2)/7$ ,

$s_w = \sqrt{s_w^2} = 0.0025$ . 查表  $t_{0.05}(7) = 1.8946$ . 所求的两总体期望差  $\mu_1 - \mu_2$  的置信度为 0.95 的单侧置信下限为

$$\bar{X} - \bar{Y} - t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2) \cdot S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \approx -0.0011.$$

(7) 由题知  $n_A = n_B = 10$ ,  $s_A^2 = 0.541$ ,  $s_B^2 = 0.6065$ ,  $\alpha = 0.05$ , 查  $F$  分布表得

$$F_{\alpha}(n-1, n-1) = F_{0.05}(9, 9) = 3.18, \quad F_{1-\alpha}(n-1, n-1) = F_{0.95}(9, 9) =$$

$\frac{1}{F_{0.05}(9, 9)} = \frac{1}{3.18}$ , 于是得  $\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}$  的置信度为 0.95 的单侧置信上限为:

$$\frac{s_A^2}{s_B^2} \cdot \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)} \approx 2.8366.$$

(8) 由题知  $\bar{x} = 10$ ,  $\sigma^2 = 9$ ,  $\alpha = 0.01$ ,  $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.58$ ,  $\sqrt{n} = 10$ .  $\mu$  的置信度为 0.99 的置信区间为

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (10 - 2.58 \times 0.3, 10 + 2.58 \times 0.3) = (9.23, 10.77).$$

$$P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{10000} X_i - E \sum_{i=1}^{10000} X_i}{\sqrt{D \sum_{i=1}^{10000} X_i}} \geq \frac{k - E \sum_{i=1}^{10000} X_i}{\sqrt{D \sum_{i=1}^{10000} X_i}} \right\} \geq 0.99 \Rightarrow k \geq 99311.$$

## 第八章 假设检验

### 习题 8-1 假设检验的基本概念

#### 1、不正常

**解** 根据题意, 需要检验假设  $H_0: \mu = \mu_0 = 0.5$ ,  $H_1: \mu \neq \mu_0 = 0.5$ ,

选用统计量

$$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1),$$

计算得

$$|u| = \left| \frac{0.511 - 0.5}{0.015/\sqrt{9}} \right| = 2.2.$$

对于显著性水平  $\alpha = 0.05$ , 查正态分布表得,  $u_{\alpha/2} = u_{0.025} = 1.96$ , 所以有

$$|u| = 2.2 > u_{\alpha/2} = 1.96.$$

因此拒绝原假设  $H_0$ , 可以认为包装机工作是不正常的.

#### 2、有变化

**解** 根据题意, 需要检验假设  $H_0: \mu = \mu_0 = 56$ ,  $H_1: \mu \neq \mu_0 = 56$ ,

选用统计量

$$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1),$$

计算得

$$|u| = \left| \frac{54.944 - 56}{0.9/\sqrt{9}} \right| = 3.52.$$

对于显著性水平  $\alpha = 0.05$ ，查正态分布表得， $u_{\alpha/2} = u_{0.025} = 1.96$ ，所以有

$$|u| = 3.52 > u_{\alpha/2} = 1.96.$$

因此拒绝原假设  $H_0$ ，可以认为总体的平均抗拉强度有变化。

3、可以

**解** 根据题意，需要检验假设  $H_0: \mu = \mu_0 = 4.55$ ， $H_1: \mu \neq \mu_0 = 4.55$ ，

选用统计量

$$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1),$$

计算得

$$|u| = \left| \frac{4.484 - 4.55}{0.108/\sqrt{9}} \right| = 1.833.$$

对于显著性水平  $\alpha = 0.05$ ，查正态分布表得， $u_{\alpha/2} = u_{0.025} = 1.96$ ，所以有

$$|u| = 1.833 < u_{\alpha/2} = 1.96.$$

因此接受原假设  $H_0$ ，可以认为现在生产的铁水平均含碳量仍为 4.55。

### 习题 8-2 单个正态总体参数的假设检验

1、不可以

**解** 检验假设  $H_0: \mu = 1277$ ， $H_1: \mu \neq 1277$ 。

由题意， $\sigma^2$  未知，选用  $t$  检验法。首先选用  $t$  统计量：

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}},$$

由样品观测值，计算得  $\bar{x} = 1259$ ， $s = 11.9373$ ， $n = 5$ ，故  $t$  统计量的观测值为

$$t = \frac{1259 - 1277}{11.9373/\sqrt{5}} = -3.372.$$

由显著性水平  $\alpha = 0.05$ ,  $n = 5$ , 查  $t$  分布表得  $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(4) = 2.7764$ , 可见

$$|t| = 3.372 > t_{\alpha/2}(n-1) = 2.7764.$$

故拒绝原假设  $H_0$ , 即不认为  $\mu = 1277$ .

2、可以

解 由题意, 要检验  $H_0: \sigma^2 = 0.04$ ,  $H_1: \sigma^2 \neq 0.04$ ,

由于  $\mu$  未知, 选取统计量  $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ , 计算得

$$n = 6, \quad \bar{x} = 14.0667, \quad s^2 = 0.0787, \quad \chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{5 \times 0.0787}{0.04} = 9.8375.$$

对于  $\alpha = 0.05$ , 查  $\chi^2$  分布表得

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.975}(5) = 0.831, \quad \chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.025}(5) = 12.832.$$

则 
$$0.831 < \chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = 9.8375 < 12.832.$$

所以不能拒绝原假设  $H_0$ , 可以认为这批元件电的方差为 0.04.

3、显著提高

解 根据题意, 需要检验假设  $H_0: \mu \leq 1500$ ,  $H_1: \mu > 1500$ , 选用统计量

$$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1),$$

计算得

$$u = \frac{1675 - 1500}{44.744/\sqrt{25}} = 19.556.$$

对于显著性水平  $\alpha = 0.05$ , 查正态分布表得,  $u_\alpha = u_{0.05} = 1.645$ , 所以有

$$u = 19.556 > u_\alpha = 1.645.$$

因此拒绝原假设  $H_0$ ，认为采用新工艺后灯管寿命是否有显著提高。

#### 4、无系统偏差

**解** 检验假设  $H_0: \mu = 112.6$ ,  $H_1: \mu \neq 112.6$ 。

由题意， $\sigma^2$  未知，选用  $t$  检验法。首先选用  $t$  统计量：

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}},$$

由样品观测值，计算得  $n = 7$ ,  $\bar{x} = 112.8$ ,  $s = 1.1358$ ，故  $t$  统计量的观测值为

$$t = \frac{112.8 - 112.6}{1.1358/\sqrt{7}} = 0.4659.$$

由显著性水平  $\alpha = 0.05$ ， $n = 7$ ，查  $t$  分布表得  $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(6) = 2.4469$ ，可见

$$|t| = 0.4659 < t_{\alpha/2}(n-1) = 2.4469.$$

故接受原假设  $H_0$ ，即认为用热敏电阻测温仪间接测温无系统偏差。

#### 5、没有提高

**解** 检验假设  $H_0: \mu = 10620$ ,  $H_1: \mu \neq 10620$ 。

由题意， $\sigma^2$  未知，选用  $t$  检验法。首先选用  $t$  统计量：

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}},$$

由于  $n = 10$ ,  $\bar{x} = 10631$ ,  $s = 80.9968$ ，故  $t$  统计量的观测值为

$$t = \frac{10631 - 10620}{80.9968/\sqrt{10}} = 0.4295.$$

由显著性水平  $\alpha = 0.05$ ， $n = 10$ ，查  $t$  分布表得  $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(9) = 2.2622$ ，可见

$$|t| = 0.4295 < t_{\alpha/2}(n-1) = 2.2622.$$

故接受原假设  $H_0$ ，认为新生产的镍合金线的抗拉强度没有提高。

### 习题 8-3 两个正态总体参数的假设检验

## 1、有显著差异

解 设两台车床加工的零件外径分别为  $X, Y$ ，均近似服从正态分布：

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2),$$

检验

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

由于  $n_1 = 9, n_2 = 6, \bar{x} = 42.3222, \bar{y} = 34.9833$ ，且  $S_1^2 = 0.3444, S_2^2 = 2.6777$ ，

运用  $F$  检验法算得 
$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{0.3444}{2.6777} = 0.1286.$$

对于显著性水平  $\alpha = 0.1$ ，查  $F$  分布表得，

$$F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_{0.05}(8, 5) = 3.69, F_{1-\alpha/2}(8, 5) = \frac{1}{F_{\alpha/2}(5, 8)} = \frac{1}{4.82} = 0.2075.$$

所以有

$$F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) = 0.2075 > F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 0.1286.$$

因此显著性水平  $\alpha = 0.1$  时拒绝原假设，认为两车床生产的零件外径精度存在显著差异。

## 2、无显著差异

解 用  $X, Y$  分别表示两台机床加工的产品直径，则

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2).$$

根据题意，需要检验  $H_{01}: \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_{11}: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ 。

运用  $F$  检验法，由于  $n_1 = 8, n_2 = 7, \bar{x} = 20.1125, \bar{y} = 20.00$ ，且

$$S_1^2 = 0.2041, S_2^2 = 0.3967, \text{ 算得 } F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{0.2041}{0.3967} = 0.5145.$$

对于显著性水平  $\alpha = 0.05$ ，查  $F$  分布表得，

$$F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) = F_{0.025}(7, 6) = 5.12, F_{1-\alpha/2}(7, 6) = \frac{1}{F_{\alpha/2}(6, 7)} = \frac{1}{5.70} = 0.1754.$$

所以有

$$F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) = 0.1754 < F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 0.5145 < F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) = 5.12.$$

故接受假设  $H_{01}: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ . 下面检验假设  $H_0: \mu_1 = \mu_2, H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ .

由于方差未知, 但是  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ , 可用  $t$  检验法. 首先选取统计量

$$t = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2), \quad \text{其中 } S_w^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}, \quad S_w = \sqrt{S_w^2}.$$

对于  $\alpha = 0.05$ , 查  $t$  分布表, 得临界值  $t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) = t_{0.025}(13) = 2.1604$ , 而

$$|t| = \left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right| = \frac{0.1125}{0.2802} = 0.4015 < t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) = 2.1604.$$

故接受原假设  $H_0: \mu_1 = \mu_2$ , 即认为甲、乙两台机床加工的精度无显著差异且直径期望值相等.

### 3、两支矿脉含锌量相同

解 用  $X, Y$  分别表示东、西两支矿脉的含锌量, 则

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \quad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2).$$

根据题意, 需要检验  $H_0: \mu_1 = \mu_2, H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ . 由于方差未知, 需要首先检验

$$H_{01}: \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_{11}: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

由于  $\bar{x} = 0.230, S_1^2 = 0.1337, n_1 = 9, \bar{y} = 0.269, S_2^2 = 0.1736, n_2 = 8$ ,

运用  $F$  检验法, 算得  $F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{0.230}{0.269} = 0.8551$ .

对于显著性水平  $\alpha = 0.05$ , 查  $F$  分布表得,

$$F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) = F_{0.025}(8, 7) = 4.53, F_{1-\alpha/2}(8, 7) = \frac{1}{F_{\alpha/2}(7, 8)} = \frac{1}{4.9} = 0.2041.$$

所以有

$$F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) = 0.2041 < F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = 0.8551 < F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) = 4.53.$$

故接受假设  $H_{01}: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ . 下面检验假设  $H_0: \mu_1 = \mu_2, H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ .

由于方差未知, 但是  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ , 可用  $t$  检验法. 首先选取统计量

$$t = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2), \quad \text{其中 } S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}, \quad S_w = \sqrt{S_w^2}.$$

对于  $\alpha = 0.05$ , 查  $t$  分布表, 得临界值  $t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) = t_{0.025}(15) = 2.1315$ , 而

$$|t| = \left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right| = \frac{0.039}{0.1896} = 0.2057 < t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) = 2.1315.$$

故接受原假设  $H_0: \mu_1 = \mu_2$ , 即认为可以认为两支矿脉含锌量相同

#### 习题 8-4 单边假设检验

1、合格

解 由题意, 需检验假设:

$$H_0: \mu \geq 10620, \quad H_1: \mu < 10620.$$

由于  $\sigma^2$  未知, 选用统计量  $t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ . 计算得

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{10600 - 10620}{80/\sqrt{10}} = -0.7906.$$

而对于  $\alpha = 0.1$ , 查  $t$  分布表得  $t_{\alpha}(n-1) = t_{0.1}(9) = 1.3830$ .

因为  $t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = -0.7906 > -t_{\alpha}(n-1) = -1.3830$ , 所以根据上述左边检验, 接受

$H_0$ , 认为该厂的镍合金线的抗拉强度合格, 即均值不低于  $10620(\text{kg/mm}^2)$ .

2、可以

解 由题意, 需检验假设

$$H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2 = 80, \quad H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 = 80.$$

由于  $\mu$  未知, 选用  $\chi^2$  统计量来进行右边检验:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2(n-1).$$

计算得  $\bar{x} = 62.40$ ,  $s^2 = 121.8222$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)}{\sigma_0^2} s^2 = \frac{\sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2}{80} = \frac{9 \cdot 121.8222}{80} = 13.7050.$$

对于显著性水平  $\alpha = 0.05$ , 查  $\chi^2$  分布表得  $\chi_{\alpha}^2(n-1) = \chi_{0.05}^2(9) = 16.919$ .

因为  $\chi^2 = \frac{(n-1)}{\sigma_0^2} s^2 = 13.705 < \chi_{\alpha}^2(n-1) = 16.919$ , 所以接受原假设  $H_0$ , 认为整批

保险丝的熔化时间的方差小于等于 80.

3、

(1) 可以

解 检验假设

$$\begin{aligned} H_{01}: \mu = \mu_0 = 60, \quad H_{11}: \mu \neq \mu_0 = 60 \\ H_{02}: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 92, \quad H_{12}: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 = 92 \end{aligned}$$

由题意,  $\sigma^2$  未知, 选用  $t$  检验法. 首先选用  $t$  统计量:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}},$$

由于  $n = 9$ ,  $\bar{x} = 62$ ,  $s = 10$ , 故  $t$  统计量的观测值为

$$|t| = \left| \frac{62 - 60}{10/\sqrt{9}} \right| = 0.60.$$

由显著性水平  $\alpha = 0.05$ ,  $n = 9$ , 查  $t$  分布表得  $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(8) = 2.306$ , 可见

$$|t| = 0.60 < t_{\alpha/2}(n-1) = 2.306.$$

故接受原假设  $H_{01}$ , 认为  $\mu = \mu_0 = 60$ .

接下来选用  $\chi^2$  统计量来进行方差检验:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2(n-1).$$

计算得  $\bar{x} = 62$ ,  $s^2 = 100$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)}{\sigma_0^2} s^2 = \frac{8 \cdot 100}{92} = 8.6957.$$

对于显著性水平  $\alpha = 0.05$ , 查  $\chi^2$  分布表得  $\chi_{\alpha/2}^2(n-1) = \chi_{0.025}^2(8) = 19.022$ .

因为  $\chi^2 = \frac{(n-1)}{\sigma_0^2} s^2 = 8.6957 < \chi_{\alpha/2}^2(n-1) = 19.02$ , 所以接受原假设  $H_{02}$ , 认为

$\sigma^2 = \sigma_0^2 = 92$ . 从而认为整批保险丝的熔化时间服从  $N(60, 92)$ .

(2) 不显著;

**解** 由题意, 需检验假设

$$H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2 = 70, \quad H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 = 70.$$

选用  $\chi^2$  统计量来进行右边检验:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)}{\sigma^2} S^2 \sim \chi^2(n-1).$$

计算得  $\bar{x} = 62$ ,  $s^2 = 100$

$$\chi^2 = \frac{(n-1)}{\sigma_0^2} s^2 = \frac{8 \cdot 100}{70} = 11.4286.$$

对于显著性水平  $\alpha = 0.05$ , 查  $\chi^2$  分布表得  $\chi_{\alpha}^2(n-1) = \chi_{0.05}^2(8) = 15.507$ .

因为  $\chi^2 = \frac{(n-1)}{\sigma_0^2} s^2 = 11.4286 < \chi_{\alpha}^2(n-1) = 15.507$ , 所以接受原假设  $H_0$ , 认为整

批保险丝的熔化时间的方差不显著大于 70.

4、有显著性差异

**解** 用  $X, Y$  分别表示服用甲、乙两种安眠药后增加的睡眠时数, 则

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \quad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2).$$

由题意, 需检验假设  $H_0: \mu_1 = \mu_2, H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ .

由于方差未知，但是  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ，可用  $t$  检验法。首先选取统计量

$$t = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2), \quad \text{其中 } S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}, \quad S_w = \sqrt{S_w^2}.$$

计算得  $\bar{x} = 2.3300$ ,  $s_1^2 = 4.0090$ ,  $\bar{y} = 0.7500$ ,  $s_2^2 = 3.2006$

对于  $\alpha = 0.1$ ，查  $t$  分布表，得临界值  $t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) = t_{0.05}(18) = 1.7341$ ，而

$$|t| = \left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right| = \frac{1.5800}{1.8986 \times 0.4472} = 1.8608 > t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) = 1.7341.$$

故拒绝原假设  $H_0: \mu_1 = \mu_2$ ，即认为两种安眠药的疗效有显著性差异。

5、甲比乙疗效显著

解 由题意，需检验假设  $H_0: \mu_1 \leq \mu_2, H_1: \mu_1 > \mu_2$ 。

由于方差未知，但是  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ，可用  $t$  检验法。首先选取统计量

$$t = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2), \quad \text{其中 } S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}, \quad S_w = \sqrt{S_w^2}.$$

计算得  $\bar{x} = 2.3300$ ,  $s_1^2 = 4.0090$ ,  $\bar{y} = 0.7500$ ,  $s_2^2 = 3.2006$

对于  $\alpha = 0.1$ ，查  $t$  分布表，得临界值  $t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2) = t_{0.1}(18) = 1.3304$ ，而

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{1.5800}{1.8986 \times 0.4472} = 1.8608 > t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2) = 1.3304.$$

故根据右边检验拒绝原假设  $H_0$ ，认为甲安眠药比乙安眠药疗效显著。

### 习题 8-5 非参数假设检验

- 1、根据皮尔逊  $\chi^2$  检验和例 1，可知每年夏季发生暴雨的天数服从泊松分布；
- 2、由柯尔莫哥洛夫检验，服从指数分布；

3、由  $W$  检验知  $W = \frac{\left\{ \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_k (W) [x_{(n+1-k)} - x_{(k)}] \right\}^2}{\sum_{k=1}^n (x_{(k)} - \bar{x})^2}$ , 参考本节例 2, 可知其服从正态分布;

4、根据独立性检验和例 3, 可知不可以认为吸烟量对慢性气管炎没有影响.

### 习题 8-6 假设检验问题的 $p$ 值法

1、是

解 检验假设

$$H_0: \mu = \mu_0 = 1600, \quad H_1: \mu \neq \mu_0 = 1600.$$

由题意,  $\sigma^2$  未知, 选用  $t$  检验法. 选用  $t$  统计量:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}},$$

由于  $n=10$ ,  $\bar{x}=1582$ ,  $s=128.5647$ , 故  $t$  统计量的观测值为

$$t_0 = \frac{1582 - 1600}{128.5647/\sqrt{10}} = -0.4427,$$

$$p\text{值} = P_{\mu=\mu_0} \{|t| \geq -t_0\} = 2 \times S_{t \leq t_0} = 0.6684.$$

由显著性水平  $\alpha=0.05$ , 知  $p\text{值} = 0.6684 > \alpha = 0.05$

故接受原假设  $H_0$ , 认为该厂生产的灯泡平均寿命为 1600 小时.

2、是

解 根据题意提出假设  $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 64$ ,  $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 = 64$ .

由于  $n=10$ ,  $\bar{x}=575.2000$ ,  $s^2=75.7333$

由  $\chi^2$  检验法,  $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$  的观察值为

$$\chi_0^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{9 \times 75.7333}{64} = 10.6500.$$

计算得

$$p\text{值} = 2 \times P_{\sigma^2 = \sigma_0^2} \{ \chi^2 \geq 10.6500 \} = 0.6010,$$

则  $p > \alpha = 0.05$ , 因此接受  $H_0$ , 认为该车间生产的铜丝的折断力的方差为 64.

3、有显著性提高

解 检验假设

$$H_0: \mu \leq \mu_0 = 3000, \quad H_1: \mu > \mu_0 = 3000.$$

由题意,  $\sigma^2$  未知, 选用  $t$  检验法. 选用  $t$  统计量:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}},$$

由于  $n = 20$ ,  $\bar{x} = 3100$ ,  $s = 170$ , 故  $t$  统计量的观测值为

$$t_0 = \frac{3100 - 3000}{170/\sqrt{20}} = 2.6307,$$

$$p\text{值} = P_{\mu = \mu_0} \{ t \geq t_0 \} = 0.0082.$$

由显著性水平  $\alpha = 0.01$ , 知  $p\text{值} = 0.0082 < \alpha = 0.01$

故拒绝原假设  $H_0$ , 认为这批元件的使用寿命有显著性提高.

4、保持

解 根据题意提出假设  $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0.18$ ,  $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 = 0.18$ .

由于  $n = 31$ ,  $\bar{x} = 11.0839$ ,  $s^2 = 0.2667$

由  $\chi^2$  检验法,  $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$  的观察值为

$$\chi_0^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{30 \times 0.2667}{0.18} = 44.4500.$$

计算得

$$p\text{值} = 2 \times P_{\sigma^2 = \sigma_0^2} \{ \chi^2 \geq 44.4500 \} = 0.0868,$$

则  $p > \alpha = 0.05$ , 因此接受  $H_0$ , 认为车床保持原来的加工精度.

## 第九章 线性回归与方差分析

### 习题 9-1 线性回归

1、解 由本节例 1、例 2 可得  $\hat{h} = 9.23 + 0.4x$ , 且回归方程的回归效果是显著的.

2、解 由本节例 1、例 3 可得  $\hat{y} = 4.67 + 0.313x$ ,  $x = 100(s)$  时腐蚀深度的变化区间为  $(31.66, 40.28)$ .

3、证明 由于希望由估计值  $a, \hat{b}$  所确定的回归方程能使  $y_i$  与  $a + \hat{b}x_i$  的偏差最小, 即要求  $a, \hat{b}$  满足:

$$Q = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2$$

达到最小, 因此利用最小二乘法来求  $a, b$  的估计值  $a, \hat{b}$ . 在上式中对  $a, b$  求偏导, 并令其为 0, 得:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i) = 0, \\ \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)x_i = 0. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a = \bar{y} - b\bar{x}, \\ b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \end{cases}$$

其中,  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ,  $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ , 为方便起见, 记

$$L_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2,$$

$$L_{xy} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y},$$

$$L_{yy} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2.$$

所以,  $a$ 、 $b$  的估计值为

$$\begin{cases} \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}, \\ \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{L_{xy}}{L_{xx}}. \end{cases}$$

4、证明 记

$$S^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2,$$

称为观测值  $y_1, y_2, \dots, y_n$  的离差平方和,  $S^2$  反映了观测值总的分散程度. 对  $S^2$  进行分解, 得到

$$\begin{aligned} S^2 &= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n \left( (y_i - \bar{y}) + (y_i - y_i) \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - y_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(y_i - y_i), \end{aligned} \quad (9.1.6)$$

其中,  $y_i = a + \hat{b}x_i$  称为回归值, 且最后一项

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(y_i - y_i) &= \sum_{i=1}^n (a + \hat{b}x_i - \bar{y})(y_i - a - \hat{b}x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (\bar{y} - \hat{b}\bar{x} + \hat{b}x_i - \bar{y})(y_i - \bar{y} + \hat{b}\bar{x} - \hat{b}x_i) \\ &= \hat{b} \sum_{i=1}^n \left( (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) - (x_i - \bar{x})^2 \right) \\ &= \hat{b} \left( L_{xy} - \frac{L_{xy}}{L_{xx}} L_{xx} \right) = 0, \end{aligned}$$

所以

$$S^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - y_i)^2 =: S_1^2 + S_2^2,$$

其中  $S_1^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ ,  $S_2^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - y_i)^2$  分别称为回归平方和与残差平方和.

5、证明 由于

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a + \hat{b}x_i) = a + \hat{b}\bar{x} = \bar{y},$$

所以  $S_1^2$  是回归值  $y_i$  的离差平方和，它反映了  $y_1, y_2, \dots, y_n$  的分散程度，由于  $y_i = a + \hat{b}x_i$ ，所以这种分散程度是由于  $Y$  与  $X$  之间的线性相关关系引起的。因为一旦  $\hat{b} = 0$ ， $y_1, y_2, \dots, y_n$  全部相等，就不会有分散程度。

残差平方和  $S_2^2$  表示观测值  $y_i$  与回归值  $y_i$  的离差平方和，反映了  $X$  对  $Y$  的线性影响之外的其余因素而产生的误差。

由  $\chi^2$  统计量的知识及浙江大学《概率论与数理统计》第四版第六章、第九章附录的详细证明可知在原假设  $H_0: b = 0$  成立时有

$$\frac{S_1^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1), \quad \frac{S_2^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2),$$

且  $S_1^2$  与  $S_2^2$  相互独立，从而有  $F$  统计量：

$$F = \frac{S_1^2/1}{S_2^2/(n-2)} \sim F(1, n-2).$$

### 习题 9-2 方差分析

- 1、**解** 参考本节例 1，知不同的贮存方法对含水率的影响无显著性差异。
- 2、**解** 参考本节例 2，知季度因素对产品销售量影响不显著；地区因素对产品销售量影响显著。
- 3、**证明** 为了考察因子  $A$  对试验结果是否有显著的影响，我们把因子  $A$  的  $m$  个水平  $A_1, A_2, \dots, A_m$  看成是  $m$  个独立的正态总体，而  $x_{ij}, j=1, 2, \dots, k$  为取自第  $i$  个总体的第  $j$  个样本， $i=1, 2, \dots, m$ 。因此可设  $X_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ ， $i=1, 2, \dots, m$ ， $j=1, 2, \dots, k$ 。

可以认为  $\mu_i = \mu + \varepsilon_i$ ， $\varepsilon_i$  是因子  $A$  的第  $i$  个水平  $A_i$  所引起的差异。因此检验因子  $A$  的各水平之间是否有显著的差异，相当于做下列检验：

$$H_{01}: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_m = \mu,$$

或者相当于做检验:

$$H_{01}: \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_m = 0.$$

令

$$S_T = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (x_{ij} - \bar{x})^2, \quad S_A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (\bar{x}_i - \bar{x})^2 = k \sum_{i=1}^m (\bar{x}_i - \bar{x})^2,$$

$$S_e = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (x_{ij} - \bar{x}_i)^2, \quad \bar{x}_i = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_{ij}, \quad \bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{x}_i = \frac{1}{mk} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k x_{ij},$$

由上节第 4 题可知

$$S_T = S_e + S_A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (\bar{x}_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (x_{ij} - \bar{x}_i)^2.$$

4、证明  $S_T = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (x_{ij} - \bar{x})^2$  称为总离差平方和，它是所有观察值  $x_{ij}$  与其总平均值  $\bar{x}$  之差的平方和，用来描述全部数据的离散程度。由前述  $x_{ij}$  是服从正态分布的

随机变量，当  $H_{01}$  成立时， $x_{ij}$  独立同分布于同一正态随机变量。由第六章统计量的知识及上节第 5 题知：

$$\frac{S_T}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (x_{ij} - \bar{x})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(mk - 1).$$

$S_e = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$  是观察值与组内平均值  $\bar{x}_i$  之差的平方和，称为组内平方和

或误差平方和。它反映了同一水平下组内样本的随机波动。注意到  $S_e$  是非负二

次型，并且在  $mk$  个平方和中有  $m$  个约束条件： $\sum_{j=1}^k (x_{ij} - \bar{x}_i) = 0, i = 1, 2, \dots, m$ 。所

以  $S_e = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$  的自由度  $f_e = mk - m$ 。

$S_A = k \sum_{i=1}^m (\bar{x}_i - \bar{x})^2$  是组内平均值与总平均值之差的平方和，称为组间平方



1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1.30
2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	4.63
3	1	1	1	1	3	3	3	3	3	7.23
4	1	2	2	2	1	1	1	2	3	0.50
5	1	2	2	2	2	2	2	3	1	3.67
6	1	2	2	2	3	3	3	1	2	6.23
7	1	3	3	3	1	1	1	3	2	1.37
8	1	3	3	3	2	2	2	1	3	4.73
9	1	3	3	3	3	3	3	2	1	7.07
10	2	1	1	3	1	2	3	1	1	0.47
11	2	1	2	3	2	3	1	2	2	3.47
12	2	1	3	3	3	1	2	3	3	6.13
13	2	2	1	1	1	2	3	2	3	0.33
14	2	2	2	1	2	3	1	3	1	3.40
15	2	2	3	1	3	1	2	1	2	5.80
16	2	3	1	2	1	2	3	3	2	0.63
17	2	3	2	2	2	3	1	1	3	3.97
18	2	3	3	2	3	1	2	2	1	6.50
19	3	1	3	2	1	3	2	1	1	0.03
20	3	1	3	2	2	1	3	2	2	3.40
21	3	1	3	2	3	2	1	3	3	6.80
22	3	2	1	3	1	3	2	2	3	0.57
23	3	2	1	3	2	1	3	3	1	3.97
24	3	2	1	3	3	2	1	1	2	6.83
25	3	3	2	1	1	3	2	3	2	1.07
26	3	3	2	1	2	1	3	1	3	3.97
27	3	3	2	1	3	2	1	2	1	6.57
$K_1$	36.7 3	33.4 6	35.6 3	34.3 0	6.27	32.9 4	34.2 1	33.3 3	32.9 8	100.6 4
$K_2$	30.7 0	31.3 0	32.0 8	31.7 3	35.2 1	34.6 6	33.1 3	33.0 4	33.4 3	
$K_3$	33.2 1	35.8 8	32.9 3	34.6 1	59.1 6	33.0 4	33.3 0	34.2 7	34.2 3	
极差 $R$	6.03	4.58	7.30	2.88	52.8 9	1.72	1.08	0.23	1.25	
优方案	$A_1$	$B_3$	$(A \times B)_{11}$	$C_3$						

计算平均离差平方和及  $F$  值并列出下表:

差异来源	离差平方和	自由度 $f$	平均离差平方和	$F$ 值	临界值	显著性	优方案	
$A$	2.04	2	1.02	20.40	$F_{0.01}(2, 26)$	**	$A_1$	
$B$	1.17	2	0.58	11.60	=6.23	**	$B_3$	
$C$	155.87	2	77.93	1559.60	$F_{0.01}(4, 16)$	**	$C_3$	
$A \times B$	1.32	4	0.33	6.60	=4.47	**	$A_1 B_3 C_3$	
$A \times C$	0.28	$\left. \begin{array}{l} 4 \\ 4 \\ 8 \end{array} \right\} 16$	0.05					
$B \times C$	0.18							
误差	0.34							
总和	161.20	26						

由于本题的试验指标是产量，自然越大越好，所以最优方案应该选取各因子中  $K$  的最大值所对应的水平。从上表可以看出，因子  $A, B, C$  和交互作用  $A \times B$  显著性较高。结合上述 2 个表可以看出因子  $C$  对试验指标影响最大且因子  $A$  应取第 1 水平  $A_1$ ，因子  $B$  应取第 3 水平  $B_3$ ，因子  $C$  应取第 3 水平  $C_3$ ，所以最优方案应该是  $A_1 B_3 C_3$ 。