中山大学本科生补考试卷

考试科目：《概率论与数理统计》

学年学期：　学年第　学期　　姓　　名：__________

学　院/系：　　学　　号：__________

考试方式：开卷　　年级专业：__________

考试时长：120 分钟　　班　　别：__________

警示《中山大学授予学士学位工作细则》第八条："考试作弊者，不授予学士学位。"

------以下为试题区域，必答题共 20 道题，总分 100 分；选答题 1 道，共 50 分-------------

1. 甲、乙、丙三人独立地对同一目标射击一次，各自的命中率分别为 0.5、0.4、0.3，现已知目标被命中，请问：（1）甲射中的概率分别是多少？（2）只有甲射中的概率是多少？

2. 设 X 和 Y 是相互独立的随机变量，X 在(0, 1)上服从均匀分布，Y 的概率密度是

$$f_Y(y)=\begin{cases}5e^{-5y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

求(1) X 和 Y 的联合概率密度；(2)概率 $P\left\{X^2\le Y\le X\right\}$。

3. 从 $1,2,\cdots,n$ 中任取一个数 X，再从 $X,X+1,\cdots,n$ 中任取一个数 Y，求 Y 的分布律和 $E(Y)$。

4. 设二维随机变量(X, Y)的联合分布密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi}, & x^2+y^2\le 4\\ 0, & x^2+y^2>4\end{cases}$$

求: (1) X 和 Y 的数学期望及方差；

(2)协方差 $\mathrm{cov}(X,Y)$ 与相关系数 ρ_{XY}；

(3)问 X 与 Y 是否相关？是否独立？说明理由。

5. 设总体 X 具有密度

$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，其中 λ 是未知参数

从总体抽取容量为 n 的简单样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$。

证明：$2n\lambda\overline{X}$ 服 χ^2 分布？并指出其自由度。

6. 系统L由两个相互独立的子系统L_1,L_2连接而成,连接的方式为并联，设L_1,L_2的寿命分别为X,Y, 已知它们的密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}a\mathrm{e}^{-ax} & (x>0)\\ 0 & (x\le 0)\end{cases} \quad f_Y(y)=\begin{cases}b\mathrm{e}^{-by} & (y>0)\\ 0 & (y\leqslant 0)\end{cases}$$

其中$a>0,b>0$. 试写出系统L的寿命Z的密度函数。

7. 两个二项分布随机变量$X\sim B(n_1,p)$和$Y\sim B(n_2,p)$，那么$X+Y$服从什么分布？并证明该结论。

8. 设根据以往记录的数据分析,某船只运输一批某种物品损坏的情况共有三种:损坏2%(这一事件记为A_1),损坏10%(事件A_2),损坏90%(事件A_3),且知这三种情况发生的概率为$P(A_1)=\ 0.8,\ P(A_2)=0.15,\ P(A_3)=0.05$. 现在从已被运输的一批物品中随机地取3件,发现这3件都是好的(事件B). 试求这批物品损坏2%的概率(这里设

这批物品件数很多，取出一件后不影响取后一件是否为好品的概率）。

9. 设枪靶是半径为$20cm$的圆盘,射手击中靶上任一同心圆的概率与该圆的面积成正比,且每次射击都能中靶.若以X表示弹着点与圆心的距离,试求X的密度函数$f(x)$及概率$P(|X-5|\le 5)$.

10. 某车间有同型设备300台,每台设备的工作是相互独立的,发生故障的概率都是0.01.每台设备的故障由1名维修工处理.问至少需配备多少名维修工,才能保证设备发生故障时能及时维修的概率不小于0.99?

11. 已知(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6xy(2-x-y), & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试求$f(x|y)$与$f(y|x)$，并求解条件概率$P\{x\le 0.5|y=0.5\}$和$P\{y\le 0.5|x=0.5\}$。

12. 已知分子运动速度的绝对值X服从麦克斯韦($Maxwell$)分布,即密度函数

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{4x^2}{\alpha^3\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\alpha^2}} & (x>0)\\ 0 & (x\leqslant 0)\end{cases}$$

其中参数$\alpha>0$.求分子动能$Y=\frac{1}{2}mX^2$(m为分子的质量)的密度函数.

13. 假定一大型设备在任何长为t的时间内发生故障的次数$X(t)$服从参数为λt的泊松分布.求:

(1)相继两次故障的时间间隔T的概率分布;

(2)设备已经无故障运行$8h$的情况下,再无故障运行$10h$的概率.

14. 设$X_1,X_2,..,X_n$为总体的一个样本,$x_1,x_2,..,x_n$为一相应的样本值.求下述总体的概率密度中的未知参数的极大似然估计值.

$$f(x)=\begin{cases}\theta c^{\theta}x^{-(\theta+1)}, & x>c\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中$c>0$为已知, $\theta>1$, θ为未知参数.

15. 在某地区小学五年级的男生中随意抽选了25名, 测得其平均身高为150cm, 标准差为12cm. 假设该地区小学五年级的男生身高服从正态分布律，试根据所得数据求该地区小学五年级的男生平均身高和标准差的0.95置信区间.

16. 为研究一种化肥对某种农作物的效力, 选了13块条件相当的地种植这种作物, 在其中6块上施肥，在其余7块上不施肥. 结果, 施肥的平均单产为33千克, 方差为3.2; 未施肥的平均单产为30千克, 方差为4. 假设产量服从正态分布律, 问实验结果能否说明此肥料提高产量的效力显著?(设显著性水平$\alpha=0.10$).

17. 用两种工艺(或原料) A 和B生产同一种橡胶制品, 为比较两种工艺下产品的耐磨性, 从A和B两种工艺下的产品中分别随机抽取5件和6件, 测得样本标准差分别为$S_A=18.01$, $S_B=16.55$, 假设两种工艺下产品的耐磨性X和Y都服从正态分布: $X\sim N(a,{\sigma_x}^2)$, $Y\sim N(b,{\sigma_y}^2)$, 试建立$\frac{{\sigma_x}^2}{{\sigma_y}^2}$的0.95置信区间.

18. 某农贸市场的某种商品每日的价格

$$Y_n=Y_{n-1}+X_n\ (n\geq 1)$$

其中: Y_n表示第n天该商品的价格, X_n表示第n天较前一天商品价格的变化. 已知$X_1,X_2,\ldots,X_n$相互独立, 且$E(X_n)=0$, $D(X_n)=2$ $(n=1,2,\ldots)$. 如果今天该商品的价格为80元，试估计30天后该商品的价格在77元与83元之间的概率.

19. 某厂生产一种保险丝，保险丝熔化时间X服从正态分布. 按规定方差σ^2不能超过400, 现从中抽取25个，测得其熔化时间方差$s^2=388.58$. 试根据测得数据, 检验这批产品的方差σ^2是否符号要求($\alpha=0.05$)?

20. 对某种型号飞机的飞行速度进行 20 次试验，测得最大飞行速度如下：

422.2，417.2，425.6，420.3，425.8，423.1，418.7，424.1，418.1，431.1

428.2，438.3，434.0，412.3，431.5，413.5，441.3，423.0，420.3，419.8

根据长期经验，最大飞行速度可认为是服从正态分布的，试就上述试验数据，对最大飞行速度的期望值进行区间估计，其中置信度 $1-\alpha$ 为 0.95 或者 0.99.

开放题：请运用概率统计的相关知识，分析以下三组数据。没有标准答案，请尽一切可能对数据展开深入分析。在计算机上完成，提交分析报告。

说明：此题为选答题，总分 **50** 分，得分将适当加权计入总成绩，不得分也不会影响总成绩。请在 **6** 月 **29** 日晚 **12** 之前提交，否则无效。发送至助教邮箱：liwlsysu@qq.com

X1=[10.5401202029109 9.45994429671492 9.43045782794303 7.90367283087172
11.5373705642572 9.23356504098453 8.07093967242568 12.2027715368533
9.05045788789483 8.32194193855840 8.91249280452917 7.80414751272413
7.25974339751254 14.5519993842366 12.8109951857747 10.1150703184765
6.98576328129589 7.76906393889039 9.14693177153710 11.0828321232573
6.83599115736951 4.84026568838985 6.60180541432252 10.1670216661316
10.2827072088658 10.4033588378565 9.23943069370856 9.86737819172388
8.54769396676185 11.2240432231138 6.77661105825849 10.4100591128887
7.80258124013268 8.83022612207190 10.6055666918891 11.5781813070099
7.26472263346958 12.0213174182418 10.8202862820940 9.36426889291463
9.10955760420249 9.06478729971362 8.89378475729652 9.54609124885021
9.60258071169755 11.1521255804232 12.5539533734667 10.4338288713694
9.08057332322253 10.7503807141753]

X2=[16 10 9 11 13 10 10 10 15 14 10 10 9 12 17 11 13 12 12 12
8 9 9 7 13 16 13 11 10 12 12 6 12 8 16 9 12 12 9 14
7 7 16 11 16 7 11 6 7 10 8 11 8 15 13 11 3 9 6 10
16 13 7 8 9 6 12 8 7 17 16 10 14 6 10 8 8 10 7 11
19 17 12 16 6 15 12 9 10 8 8 16 15 12 8 5 5 14 8 7]

X3=[64 73 61 65 67 73 73 55 68 66 70 72 67 66 66 65 63 68 75 72
71 64 70 63 69 73 67 66 69 61 66 66 59 65 64 70 75 74 57 65
66 70 69 68 68 70 68 65 74 67 68 56 71 69 62 70 66 68 72 66
65 66 70 60 67 69 64 67 69 71 64 67 62 60 62 65 65 64 69 65
69 72 64 72 58 63 63 61 70 67 64 57 64 69 67 56 67 74 72 62]