中山大学本科生期末考试

考试科目:《大学物理》(A 卷)

学年学期:	**2019–2020** 学年第 **2** 学期	姓　　名:	______
学　院/系:	物理学院	学　　号:	______
考试方式:	闭卷	年级专业:	______
考试时长:	**120** 分钟	班　　别:	______

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条:“考试作弊者,不授予学士学位.”

以下为试题区域, 共 25 道大题, 总分 100 分, 考生请在答题纸上作答

一、单选题 (共 20 小题，每小题 2 分，共 40 分)

1. (2 分) 两个点电荷 Q_1 和 Q_2 固定在一条直线上，相距为 d，把第三个点电荷 Q_3 放在 Q_1, Q_2 的延长线上，与 Q_2 相距为 d，如若系统能使 Q_3 保持静止，则 __C__

   A. $Q_1 = 2Q_2$　B. $Q_1 = -\sqrt{2}Q_2$　C. $Q_1 = -4Q_2$　D. $Q_1 = -2\sqrt{2}Q_2$

   解析　略

2. (2 分) 半径为 R 的均匀带电球面，总电荷为 Q，设无穷远处的电势为零，则球内距离球心为 $r(r < R)$ 的 P 点出的电场强度的大小与电势为 __D__

   A. $E = 0, U = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$　B. $E = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, U = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$

   C. $E = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, U = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$　D. $E = 0, U = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$

   解析　由高斯定理很容易求得均匀带电球面的电场分布:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E_1 \cdot 4\pi r^2 = 0, E_1 = 0, r < R$$

$$E_2 \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}, E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, r > R$$

所以球内的电势分布为

$$U_1 = \int_r^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_r^R E_1\, dr + \int_R^{\infty} E_2\, dr = 0 + \int_R^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr = -\left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]_R^{\infty} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

3. (2 分) 下列说法正确的是 <u>A</u>

A. 场强的方向总是从电势高处指向电势低处

B. 等势面上各个点场强的大小一定相等

C. 在电势高处，电势能也一定大

D. 电场强度大的地方，电势一定高

解析 略

4. (2 分) 如图1所示，在带电量为 $-Q$ 的点电荷 A 的静电场中，将另一个带电量为 q 的试探电荷从 a 点移到 b 点，a, b 两点距离点电荷 A 的距离分别为 r_1 和 r_2，则移动过程中电场力做的功为 <u>C</u>

A. $-\dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)$　　B. $\dfrac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)$

C. $-\dfrac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right)$　　D. $-\dfrac{qQ}{4\pi\epsilon_0(r_2-r_1)}$

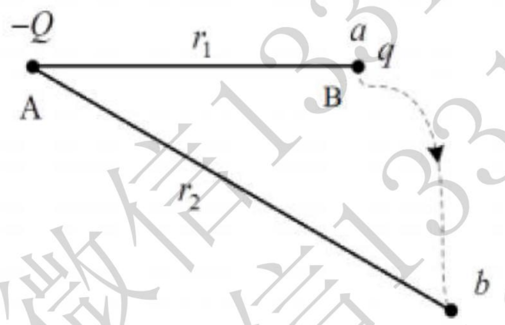

图 1　第四题

解析 电场力做功等于电荷电势能的减少。静电场力为保守力, 静电场力做功只与始末位置有关, 与中间具体路径无关。

以无穷远为零电势点时, 点电荷所激发的电场的电势为

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

所以电荷为 $-Q$ 的点电荷 A 在 a、b 两点的电势分别为

$$V_a=\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$$
$$V_b=\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

所以电荷为 q 的点电荷 B 在 a、b 两点的电势能分别为

$$W_a=qV_a=\frac{-qQ}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$$
$$W_b=qV_b=\frac{-qQ}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

所以移动过程中电场力所做的功为

$$A = W_a - W_b = \frac{-qQ}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{-qQ}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = \frac{-qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

5. (2 分) 导体处于静电平衡状态时以下哪种说法为错误的是 __D__

A. 导体内部以及表面均无电荷定向运动

B. 导体是等势体，导体表面是等势面

C. 导体表面的电场强度垂直于导体表面

D. 实心导体内部的电场变弱，但是不为零

解析 略

6. (2 分) 一块面积为 S 的很大金属平板 A 带有正电荷，电量为 Q，现把另外一个面积亦为 S 的不带电金属平板放置在 A 板附近，然后在将 A 板接地，则如图2所示，最终 A, B 两板表面上的电荷面密度分别是 __A__

A. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 0$

B. $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{Q}{2S}, \sigma_3 = -\sigma_4 = -\frac{Q}{2S}$

C. $\sigma_1 = \sigma_4 = 0, -\sigma_3 = \sigma_2 = \frac{Q}{S}$

D. $\sigma_1 = \sigma_4 = 0, \sigma_3 = -\sigma_4 = \frac{Q}{S}$

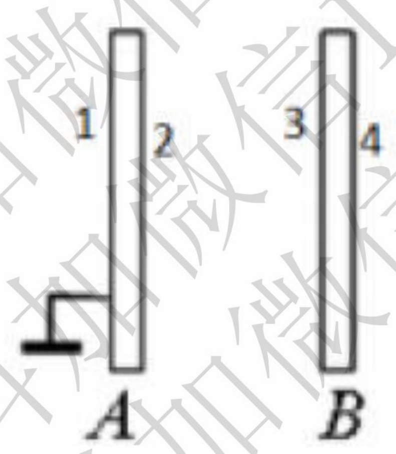

图 2 第六题

解析 静电平衡时，设从左到右四个面的电荷面密度分别为 σ_1、σ_2、σ_3、σ_4，由静电平衡时导体内电场为零可得

$$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4 = 0$$
$$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4 = 0$$
$$\sigma_2 + \sigma_3 = 0, \sigma_1 - \sigma_4 = 0$$

又因为 B 板不带电，A 板接地，所以有

$$\sigma_1 = 0, \sigma_3 = -\sigma_4$$
$$\sigma_4 = \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

7. (2 分) 真空中有一个半径为 R 的孤立金属导体球，当球上带电量为 Q 时，该体系具有的静电场能量为 C

A. $4\pi\epsilon_0 RQ^2$　　B. $\dfrac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$　　C. $\dfrac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$　　D. $\dfrac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 R}$

解析　导体球内部无电荷，所以问题等效为均匀带电球壳的静电能问题

带电球壳的场强分布为

$$\begin{cases} E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & ,r \geq a \\ E = 0 & ,r < a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} W_e &= \int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dV \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_R^\infty \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} \end{aligned}$$

8. (2 分) 两个空气电容器 C_1 和 C_2 串联以后接电源充满电，在电源保持连接的情况下，在 C_2 中插入一块电介质板，如图3所示，则 A

A. C_1 极板上电荷增加，C_2 极板上电荷增加

B. C_1 极板上电荷减少，C_2 极板上电荷增加

C. C_1 极板上电荷增加，C_2 极板上电荷减少

D. C_1 极板上电荷减少，C_2 极板上电荷减少

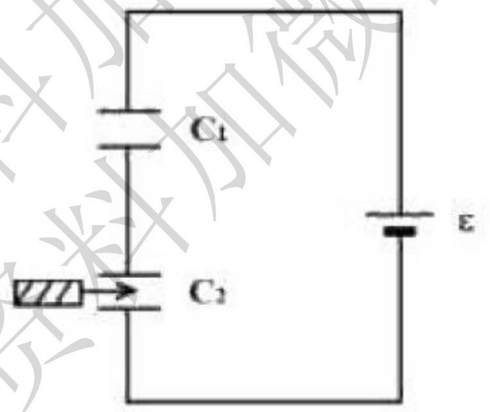

图 3　第八题

解析　回路总电容

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_2 + C_1}$$

故插入介质后 C_2 增大，C 也增大

故 $Q_{总} = CU$ 增大 (U 不变)

故 C_1 的上极板处正电荷增多，C_2 的下极板处负电荷增多

即 C_1 极板上电荷增加，C_2 极板上电荷增加

9. (2 分) 一个平行板电容器两极板的面积都是 S，相距为 d，其间插有一个厚度为 $t(t < d)$ 的金属板与极板平行，且其放置面积亦是 S，则该系统的电容大小是 B

A. $\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$ B. $\dfrac{\varepsilon_0 S}{d-t}$ C. $\dfrac{\varepsilon_0 S}{t}$ D. $\varepsilon_0 S\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{d}\right)$

解析 平行板电容器的电容

$$C=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

当极板间平行地插入一块与极板面积相同的金属板, 可以认为两个极板间的距离变小, 所以电容器的电容增大。其实插入金属板, 是将一个电容变成两个电容并进行串联, 两个新电容器的极板面积不变, 间距分别为 d_1 和 d_2, 所以两个电容分别为

$$C_1=\frac{\varepsilon_0 S}{d_1}, C_2=\frac{\varepsilon_0 S}{d_2}$$

而由电容器串联的公式

$$\frac{1}{C_{12}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=\frac{d_1}{\varepsilon_0 S}+\frac{d_2}{\varepsilon_0 S}=\frac{d_1+d_2}{\varepsilon_0 S}$$

$$C_{12}=\frac{\varepsilon_0 S}{d_1+d_2}=\frac{\varepsilon_0 S}{d-t}$$

10. (2 分) 如图4所示, 两无穷大平行板上载有均匀分布的面电流, 电流密度均为 i, 两电流平行且同向, 则 I、II 、III 三个区的磁感强度 B 的分布为: __C__

A. $B_1=0; B_2=\dfrac{\mu_0 i}{2}; B_3=\mu_0 i;$ B. $B_1=\dfrac{\mu_0 i}{2}; B_2=0; B_3=\dfrac{\mu_0 i}{2};$

C. $B_1=\mu_0 i; B_2=0; B_3=\mu_0 i;$ D. $B_1=\mu_0 i; B_2=\mu_0 i; B_3=\mu_0 i$

解析 对一个仅有期中一个无穷大平行板的情形进行分析, 根据安培环路定理

$$2BL=\mu_0 I$$

$$B=\frac{\mu_0 i}{2}$$

根据磁感应强度的叠加原理

$$B_1=\mu_0 i; B_2=0; B_3=\mu_0 i;$$

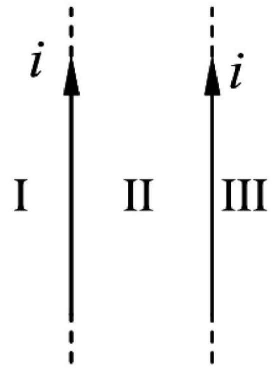

图 4 选择十

11. (2 分) 将一固定长度导线弯成一半径为 R 的单匝圆线圈, 通以电流 I, 若将该导线弯成匝数为 2 的平面圆线圈, 并通以同样的电流, 则线圈中心的磁感应强度和线圈的磁矩分别为单匝圆线圈的: <u>B</u>

A. 4 倍和 1/8;　　B. 4 倍和 1/2;　　C. 2 倍和 1/4;　　D. 2 倍和 1/2

解析

$$B = \frac{N\mu_0 I}{2R}$$

$$m = NIS$$

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{N_2}{N_1}\frac{R_1}{R_1} = 4$$

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{N_2}{N_1}\frac{R_2^2}{R_1^1} = \frac{1}{2}$$

12. (2 分) 如图 5所示, 半径为 R 的均匀导体球壳, 内部沿球的直径方向有一载流直导线, 电流 I 从 A 流向 B 后, 再沿球面均匀返回 A 点, 如图所示, 则下述说法中正确的是: <u>A</u>

A. 在 AB 线上的磁感应强度 $\vec{B} = 0$;

B. 球外的磁感应强度 $\vec{B} = 0$;

C. AB 线上的磁感应强度 $\vec{B} \neq 0$;

D. 只有在球心上的感应强度 $\vec{B} = 0$

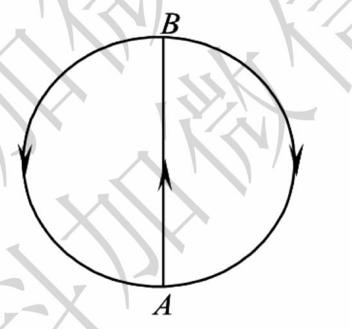

图 5　选择十二

13. (2 分) 带电粒子以某一初速度进入均匀磁场中, 若初速度 v 方向与磁场 B 方向成一个 $0 < \theta < 90^\circ$ 的夹角, 则带电粒子将会受到磁场洛伦兹力的作用, 在磁场中做 <u>D</u>

A. 变直径螺旋运动;　　B. 变速圆周运动;

C. 匀速圆周运动;　　D. 等距螺旋运动

解析　略

14. (2 分) 已知 α 粒子的质量是质子的 4 倍, 电量是质子的 2 倍, 设它们的初速度为零, 经相同的电压加速后, 垂直进入匀强磁场作圆周运动, 则 α 粒子与质子的运动半径比为: <u>C</u>

A. 1;　　B. 1/2;　　C. $\sqrt{2}$;　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解析 本题考查带电粒子在电场、磁场中的运动。在加速电场中有

$$qU = \frac{1}{2}mv^2$$

在匀强磁场中有

$$qvB = m\frac{v^2}{R}$$

得到

$$R = \sqrt{\frac{2mU}{qB^2}}$$

所以

$$\frac{R_{\mathrm{H}}}{R_\alpha} = \sqrt{\frac{m_{\mathrm{H}}}{m_\alpha} \cdot \frac{q_\alpha}{q_{\mathrm{H}}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

15. (2 分) 真空中有两块相互平行的无限大均匀带同种电荷的薄平板, 其中一块的电荷密度为 σ, 另一块的电荷密度为 2σ, 则两平板间的电场强度大小为 <u>D</u>

A. $\frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}$; B. $\frac{3\sigma}{\varepsilon_0}$; C. 0 ; D. $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

解析 对一块平板，使用高斯定理

$$2ES = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

根据电场的叠加原理，两平板间的电场强度大小为 $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

16. (2 分) 如图6所示, 一半径为 R 的圆形回路中通有电流 I_2, 另一无限长直载流导线 AB 中通有电流 I_1, AB 通过圆心, 且与圆形回路在同一平面内, 则圆形回路所受到的来自 I_1 的磁场力大小是 <u>C</u>

A. $F = 0$; B. $F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R}$; C. $F = \mu_0 I_1 I_2$; D. $F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2R}$

解析 考试来说，BC 量纲不对，排除定性分析力显然不是零，故选 C

当做大题来做:

如图 7所示

$$\mathrm{d}\vec{F} = I_2\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

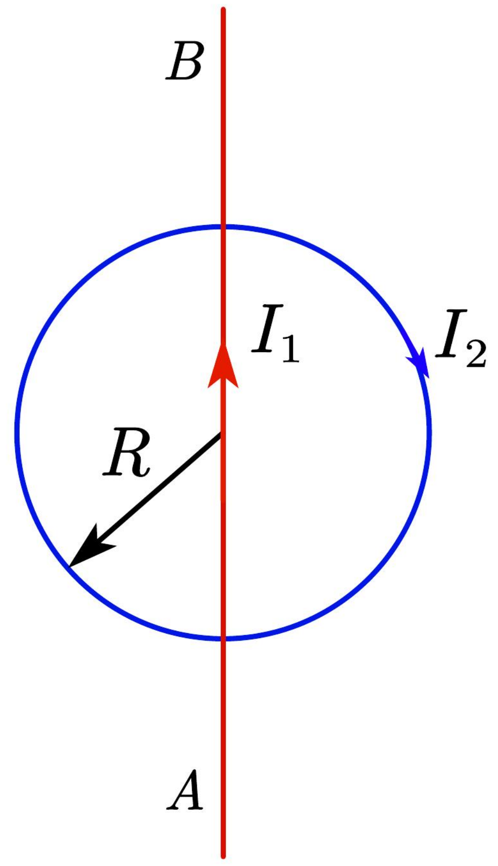

图 6　选择十六

由对称性 $F_y = 0$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}l &= R\,\mathrm{d}\theta \\
B_1 &= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R\cos\theta} \\
\mathrm{d}F &= I_2\,\mathrm{d}l B_1 \sin 90^\circ \\
&= I_2 R\,\mathrm{d}\theta \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R\cos\theta} \\
\mathrm{d}F &= I_2 R\,\mathrm{d}\theta \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R\cos\theta} \\
\mathrm{d}F_x &= \mathrm{d}F\cos\theta \\
&= I_2 R\,\mathrm{d}\theta \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R\cos\theta}\cos\theta \\
&= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\mathrm{d}\theta \\
F &= F_x \\
&= \int \mathrm{d}F_x \\
&= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \\
&= \mu_0 I_1 I_2
\end{aligned}
$$

17. (2 分) 如图 8所示, 在磁感应强度为 B 的均匀磁场中, 有一圆形载流导线, a、b、c 是其上三个长度相等的电流元, 则它们所受安培力的大小关系为 __B__

A. $F_a > F_b > F_c$;　B. $F_b > F_c > F_a$;　C. $F_a < F_b < F_c$;　D. $F_a > F_c > F_b$

解析　略

18. (2 分) 如图 9所示, 一半径为 R 的导线圆环同一个径向对称的发散磁场处处正交, 环

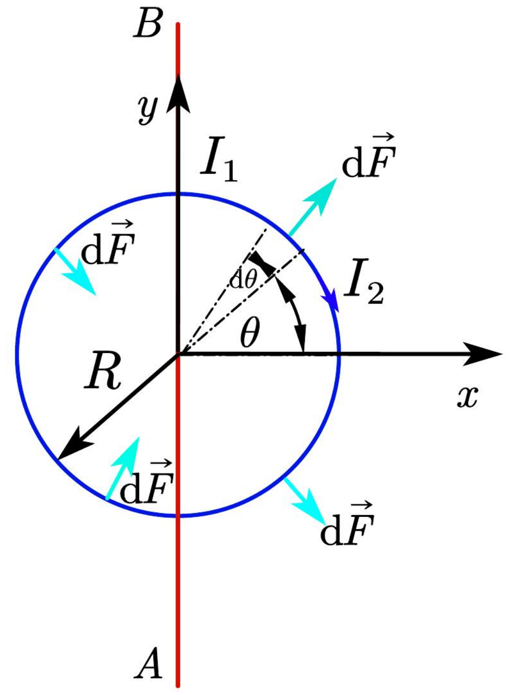

图 7　选择十六 2

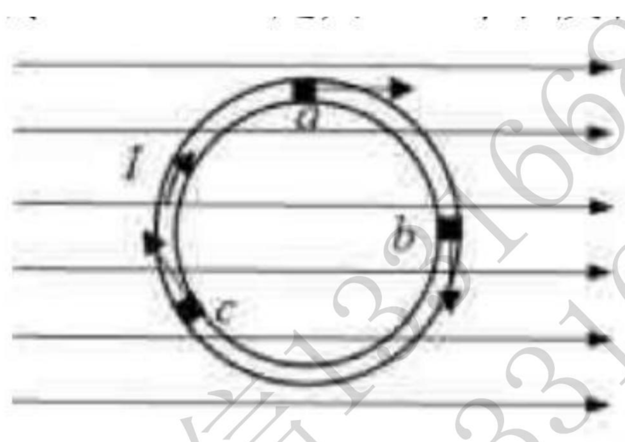

图 8　选择十七

上各个磁感应强度 $\vec{B}$ 的大小相同, 方向都与环平面的法成 θ 角, 设导线圆环通有顺时针方向的电流 I, 则磁场作用在此环上的合力大小和方向是 _A_

A. $F = 2\pi RIB\sin\theta$ 垂直环面向上;

B. $F = 2\pi RIB$ 垂直环面向上;

C. $F = 2\pi RIB\sin\theta$ 垂直环面向下;

D. $F = 2\pi RIB\cos\theta$ 沿环面背向圆心

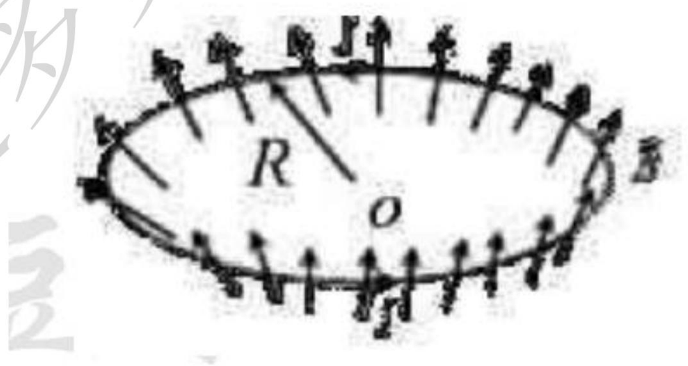

图 9　选择十八

解析　因 $F = BIL$ 只适用于直导线的安培力的计算, 所以可以把导电圆环进行无限分割, 分割后的微元可以看作是直线. 将导线分成小的电流元, 任取一小段电流元为对象, 把磁场分解成水平方向和竖直方向两个分量, 则竖直方向的分磁场产生的安培力为零, 水平方向的分磁场产生的安培力为:$F = BIL = 2\pi BIR\sin\theta$, 方向为

竖直向上

19. (2 分) 如图10所示, 一根无限长的同轴电缆线, 其芯线的截面半径为 R_1, 相对磁导率为 μ_{r1}, 其中均匀地通过电流 I, 在它的外面包有一半径为 R_2 的无限长同轴圆筒 (其厚度可忽略不计), 筒上的电流与前者等值反向, 在芯线与导体圆筒之间充满相对磁导率为 μ_{r2} 的均匀不导电磁介质。则磁感应强度 B 在 $R_1 < r < R_2$ 区中的分布为 <u>C</u>

A. $B = 0$;　　B. $B = \dfrac{\mu_0\mu_{r1}Ir}{2\pi R_1^2}$;　　C. $B = \dfrac{\mu_0\mu_{r2}I}{2\pi r}$;　　D. $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

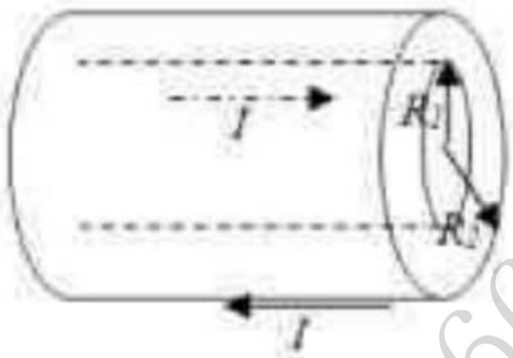

图 10　选择十九

解析　选择以中心轴为圆心, 半径为 r 的圆周为回路, 由磁介质中的安培环路定律可得

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = I$$

$$H\cdot(2\pi r) = I$$

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

所以磁感应强度为

$$B = \mu_{r2}\mu_0 H = \frac{\mu_{r2}\mu_0 I}{2\pi r}$$

20. (2 分) 关于均匀磁化磁介质中的磁感应强度 $\vec{B}$ 和磁场强度 $\vec{H}$, 下列说法中错误的是 <u>D</u>

A. 无论抗磁质还是顺磁质, B 总是和 H 同方向;

B. 通过以闭合曲线 L 为边界的任意曲面的 B 通量均相等;

C. 若闭合曲线上各点的 H 均处处为 0 , 则该曲线所包围传导电流的代数和为 0 ;

D. 若闭合曲线内没有包围传导电流, 则曲线上各点的 H 必处处为 0 ;

解析　$\because |\chi_m| \ll 1, \mu_r = 1 + \chi_m > 0, B = \mu H$

所以无论抗磁质还是顺磁质, B 总是和 H 同方向;

如果闭合曲线内没有包围传导电流, 只能说明 $\vec{H}$ 沿闭合曲线的环流为零, 并不能说明闭合曲线上各点的 $\vec{H}$ 一定为零。

磁场中的高斯定理为

$$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

由此可得, 以闭合曲线 L 为边缘的任意曲面的 $\vec{B}$ 通量均相等。

二、计算题 (一共 5 小题，共 60 分，每题 12 分)

1. (12 分) 如图 11 所示, 三个平行金属板 A, B, C 面积均为 S，A, B 间相距 l_1，A, C 间相距 l_2，板与板之间充满介电常数为 ϵ 的均匀电介质，忽略边缘效应，如果使得 B，C 两板都接地，并是 A 板带正电，求：

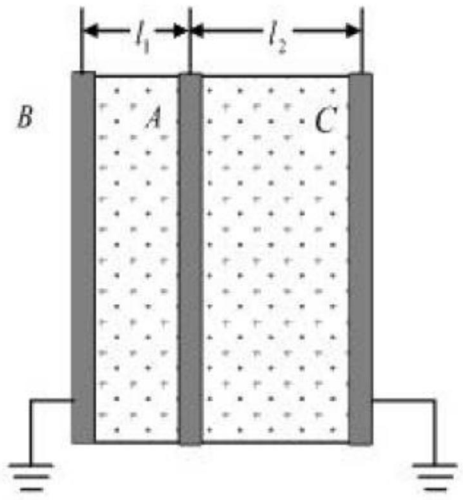

图 11　第二十一题

(1) (10 分) B，C 板上的感应电荷大小是多少

(2) (2 分) A，B 板间的电动势大小是多少

(1) 由接地可知，电容器外电场必处处为零，即电位移矢量处处为零，因此根据高斯定理

$$D_3 = \frac{Q + q_B + q_C}{S} = 0 \quad \cdots\cdots \text{本步骤 2 分, 累计 2 分}$$

$$D_1 = \epsilon E_1 = \frac{q_B}{S} \Rightarrow E_1 = \frac{q_B}{\epsilon S} \quad \cdots\cdots \text{本步骤 2 分, 累计 4 分}$$

$$D_2 = \epsilon E_2 = \frac{q_C}{S} \Rightarrow E_2 = \frac{q_C}{\epsilon S} \quad \cdots\cdots \text{本步骤 2 分, 累计 6 分}$$

$$\text{由于 } V_A = 0 - E_1 l_1 = 0 - E_2 l_2 \Rightarrow q_B l_1 = q_C l_2 \quad \cdots\cdots \text{本步骤 2 分, 累计 8 分}$$

$$\text{解得 } q_B = -\frac{l_2}{l_1 + l_2} Q, q_c = Q - q_B = -\frac{l_1}{l_1 + l_2} Q \quad \cdots\cdots \text{本步骤 2 分, 累计 10 分}$$

(2)
$$V_A = -E_1 l_1 = -\frac{q_B l_1}{\epsilon S} = \frac{l_1 l_2 Q}{(l_1 + l_2)\epsilon S} \quad \cdots\cdots \text{本步骤 2 分, 累计 12 分}$$

2. (12 分) 如图12所示, 已知：内径为 R_1，外径为 R_2 的匀质空心薄圆环上均匀分布着总电荷量为 Q 的表面电荷。过盘心垂直于盘面的 X 轴上有一点 P，它与盘心 O 的距离为 L。请求出:

(1) (2 分) 半径为 $r(R_1 < r < R_2)$, 宽带为 $\mathrm{d}r$ 的细圆环的电荷量是多少?

(2) (4 分) P 处的电势 V_p 是多少?

(3) (6 分) P 点处的电场场强 E_P 是多少

提示 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \mathrm{d}x = \sqrt{x^2 + a^2} + C$

$(uv)' = u'v + v'u$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

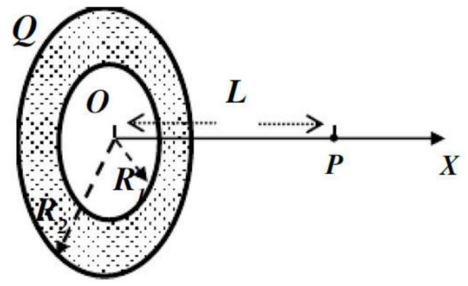

图 12　第二十二题

(1) 如图12取坐标 OX 过盘心垂直于盘面，原点 O，在盘面取一距圆心为 r，宽度为 $\mathrm{d}r$ 的圆环带，易知圆环带 $\mathrm{d}s=2\pi r\mathrm{d}r$，其上带电量为:

$$\mathrm{d}q=\sigma\mathrm{d}s=\frac{Q}{\pi(R_2^2-R_1^2)}\mathrm{d}s=\frac{2Qr\mathrm{d}r}{R_2^2-R_1^2}$$ ⋯⋯⋯ 本步骤 2 分, 累计 2 分

(2) 由此得到微元带 $\mathrm{d}q$ 在 P 点产生的电势为

$$\mathrm{d}V=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\epsilon_0 t}=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{L^2+r^2}}=\frac{Qr\mathrm{d}r}{2\pi\epsilon_0(R_2^2-R_1^2)\sqrt{L^2+r^2}}$$ ⋯ 本步骤 2 分, 累计 4 分

所以整个带电圆盘在 P 点产生的电势为

$$V_P=\int\mathrm{d}V=\int_{R_1}^{R_2}\frac{Qr\mathrm{d}r}{2\pi\varepsilon_0\left(R_2^2-R_1^2\right)\sqrt{L^2+r^2}}$$

$$=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\left(R_2^2-R_1^2\right)}\left(\sqrt{L^2+R_2^2}-\sqrt{L^2+R_1^2}\right)$$ ⋯⋯⋯ 本步骤 2 分, 累计 6 分

(3) 根据 P 点的电势，容易知道 X 轴上电势与坐标的函数关系为:

$$\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2}\left(\sqrt{x^2+R_2^2}-\sqrt{x^2+R_1^2}\right)$$ ⋯⋯⋯ 本步骤 2 分, 累计 8 分

因此，根据电势梯度法则，有

$$E(x)=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=-\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2}\left(\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+R_2^2}}-\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+R_1^2}}\right)=$$

$$\frac{Qx}{2\pi\epsilon_0 R^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+R_1^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+R_2^2}}\right)$$ ⋯⋯⋯ 本步骤 2 分, 累计 10 分

由此可得 P 点处的场强为

$$E_P=\frac{QL}{2\pi\epsilon_0 R^2}\left(\frac{1}{\sqrt{L^2+R_1^2}}-\frac{1}{\sqrt{L^2+R_2^2}}\right)$$ ⋯⋯⋯ 本步骤 2 分, 累计 12 分

3. (12 分) 如图13所示, 已知 A, B 为同心放置的两个薄导体球壳 (球壳厚度忽略)，其半径分别为 a，$4a$，两球壳之间充满两层不同的均匀电介质 1 和 2，它们的厚度为 a，$2a$，绝对介电常数分别为 ϵ_1 和 ϵ_2，A, B 之间接上一个电源, 使得 A 球壳上带有电量 $+Q$。则:

(1) (6 分) 请求出 $r=3a$ 处介质面上的电场强度 $\vec{E}$ 和电位移矢量 $\vec{D}$ 的大小。

(2) (4 分) 请给出 AB 球壳面之间的电势 U_{AB} 大小是多少?

(3) (2 分) 请计算出两个导体球壳 AB 间的电容 C_{AB} 大小是多少

(1) 作一个闭合面包围 $r=a$ 出的介质面，则有介质的高斯定理知道:

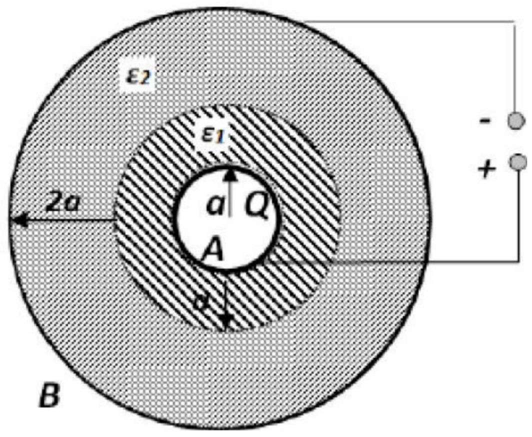

图 13　第二十三题.jpg

$\oiint \vec{D} \mathrm{d}\vec{s} = Q$ ……………………………………… 本步骤 2 分, 累计 2 分

所以 $r = 3a$ 处的 D 满足 $D \times 4\pi(3a)^2 = Q \therefore D = \dfrac{Q}{36\pi a^2}$ …… 本步骤 2 分, 累计 4 分

由 D 可得到电场强度 $\vec{E}$ 的大小为 $E = \dfrac{D}{\epsilon_2} = \dfrac{Q}{36\epsilon_2 \pi a^2}$ …… 本步骤 2 分, 累计 6 分

(2) 由高斯定理可得球壳之间的电场为 $E_1 = \dfrac{Q}{4\epsilon_1 \pi r^2}(a < r < 2a)$

$E_2 = \dfrac{Q}{4\epsilon_2 \pi r^2}(2a < r < 4a)$ ……………………………… 本步骤 2 分, 累计 8 分

所以 A 球壳面上的电势 U_A 为

$$
\begin{aligned}
U_A &= \int_a^{4a} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \\
&= \int_a^{2a} \frac{Q\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_1 r^2} + \int_{2a}^{4a} \frac{Q\mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_2 r^2} \\
&= \frac{Q}{4\pi}\left[\frac{1}{\epsilon_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2a}\right) + \frac{1}{\epsilon_2}\left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{4a}\right)\right] \\
&= \frac{Q(2\epsilon_2 + \epsilon_1)}{16\pi a \epsilon_1 \epsilon_2}
\end{aligned}
$$

……………………………………………………… 本步骤 2 分, 累计 10 分

(3) 球形电容器的电容量 C_{AB} 为

$C_{AB} = \dfrac{Q}{U_{AB}} = \dfrac{Q \times 16\pi\epsilon_1\epsilon_2 a}{Q(2\epsilon_2 + \epsilon_1)} = \dfrac{16\pi\epsilon_1\epsilon_2 a}{(2\epsilon_2 + \epsilon_1)}$ ………………… 本步骤 2 分, 累计 12 分

4. (12 分) 如图 14 所示，强度为 I 的电流均匀的流过半径为 R 的圆柱形长直导线，已知该导线中充满了相对磁导率为 μ_r 的均匀磁介质，试计算长度为 l 的导线内的磁场通过图中所示的剖面 (以半径 R 为一边，L 为另一边的矩形剖面) 的磁通量大小

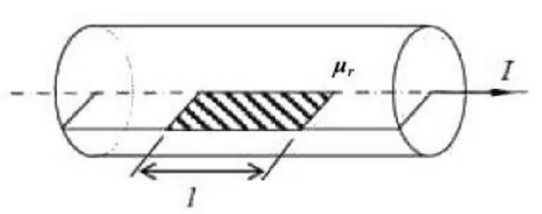

图 14　第二十四题

答案 $\phi = \dfrac{\mu_0\mu_r I l}{4\pi}$

解析

先求圆柱内磁场分布，取半径为 r 的同轴圆形环路 $(r < R)$ 根据安培环路定理

$\oint \vec{H}\cdot\vec{l} = H\cdot 2\pi r = I\dfrac{r^2}{R^2}$ ……本步骤 2 分，累计 2 分

得 $H = \dfrac{Ir}{2\pi R^2}$ ……本步骤 2 分，累计 4 分

可知 $B = \mu_0\mu_r H = \dfrac{\mu_0\mu_r I r}{2\pi R^2}$ ……本步骤 2 分，累计 6 分

取长为 l 宽为 $r \sim r + \mathrm{d}r$ 的面积元，通过其中的磁通量为

$\mathrm{d}\phi = Bl\mathrm{d}r$ ……本步骤 3 分，累计 9 分

则总磁通量 $\phi = \displaystyle\int_0^R \frac{\mu_0\mu_r I l}{2\pi R^2} r\mathrm{d}r = \frac{\mu_0\mu_r I l}{4\pi}$ ……本步骤 3 分，累计 12 分

5. (12 分) 如图 15所示，一条有着微小截面 (截面积为 S) 的匀质细线整体均匀带有正电，其中电荷线密度为 $\lambda(\lambda > 0)$, 将该细线放入一个半径为 R 的圆形导轨中，其刚好为圆环导轨周长的一半。使得该细线绕导轨圆心 O 以角速度 ω 在导轨内做逆时针方向匀速圆周运动，已知该细线的截面半径与圆周半径 R 相比可以忽略，且圆环导轨所在圆平面上有一过圆心 O 的垂直向上的中轴线 X，其上有一点 P 与圆环平面的距离为 L，求:

(1) (4 分) 此带电细线作圆周运动所产生的电流密度 j 的大小?

(2) (4 分) 圆心 O 点处的磁感应强度 B_0 的大小和方向?

(3) (4 分) 中轴线 X 上 P 距离圆环平面的距离为 L，则该点的磁感性强度 B_P 的大小以及方向?

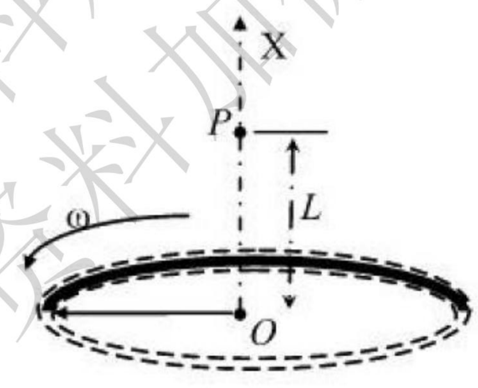

图 15 第二十五题 1

(1) **解析**

电荷线密度为 $\lambda(\lambda > 0)$ 则当细线以角速度 ω 旋转时，其产生的电流强度为

$I = \displaystyle\int_l \lambda\cdot\frac{\omega}{2\pi}\mathrm{d}l = \lambda\cdot\frac{\omega}{2\pi}\pi R = \frac{\lambda\omega R}{2}$ ……本步骤 2 分，累计 2 分

因此电流密度大小为 $j = \dfrac{I}{S} = \dfrac{\lambda\omega R}{2S}$ ……本步骤 2 分，累计 4 分

(2) **解析**

因为带电圆环旋转后形成圆电流，可知圆环的电流 $I = \dfrac{\lambda\omega R}{2}$

环电流在轴线上 O 点产生的磁感应强度计算公式，参照圆环中电流与 O 点的

关系，根据毕奥萨伐尔定律

$$\mathrm{d}B_o = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{e}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\lambda\omega R\mathrm{d}l}{2R^2}$$

由右手螺旋法则可知，其方向均为垂直圆环平面向上 ······ 本步骤 2 分, 累计 6 分

所以 $B_o = \int_l \mathrm{d}B_o = \frac{\mu_0}{8\pi}\frac{\lambda\omega R}{R^2}2\pi R = \frac{\mu_0\lambda\omega}{4}$

方向为垂直圆环平面向上 (沿 X 正方向) ······················ 本步骤 2 分, 累计 8 分

(3) **解析**

根据 (2) 中的计算以及对 X 轴上 P 点与环上任意一电流源所产生的磁感应强度的三角关系，根据毕奥萨伐尔定律以及矢量叠加原理，P 点处磁感应强度在 X 轴线上的投影为:

$$\mathrm{d}B_P = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{e}_r}{r^2}\cos\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\lambda\omega R\mathrm{d}l}{2\left(R^2+L^2\right)}\frac{R}{\sqrt{R^2+L^2}}$$ ········· 本步骤 2 分, 累计 10 分

所以 $B_P = \int_l \mathrm{d}B_X = \frac{\mu_0}{8\pi}\frac{\lambda\omega R\cdot R}{\left(R^2+L^2\right)^{\frac{3}{2}}}2\pi R = \frac{\mu_0\lambda\omega R^3}{4\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

其方向为垂直圆环平面向上 (沿 X 轴线正方向) ············ 本步骤 2 分, 累计 12 分